

# *STORIA DI EUCLIDE*

*(aggiornata al 15.12.2010)*

## *Gruppo Eratostene*



Breve biografia (Da “Euclid” , Wikipedia)

“***Euclide***(fl. 300 a.C. ...) è un matematico greco antico, che visse molto probabilmente durante il regno di Tolomeo I (367 a.C: ca – 283 a.C.) E’ sicuramente il più importante matematico della storia antica, e uno dei più importanti e riconosciuti di ogni tempo e luogo.

Euclide è noto come autore degli ***Elementi***, la più importante opera di geometria dell’antichità, tuttavia di lui si sa pochissimo.

Euclide è menzionato in un brano di Pappo... particolarmente significativa è la circostanza che lo accosta a Tolomeo I, perché ci induce a collocarne l'attività principale all'inizio del III secolo a.C. e ci fa supporre che Tolomeo lo abbia chiamato ad operare nella Biblioteca di Alessandria e nell'annesso Museo... (per il resto rimandiamo alla suddetta voce di Wikipedia)

Opere principali:

1) *Elementi*

Opere secondarie

1) *Dati*

2) *Porismi*

3) *Luoghi superficiali* andato perduto

4) *Coniche* andato perduto

5) *Ottica*

6) *Catottica*

7) *Fenomeni* descrizione della sfera celeste

8) *Sezione del canone* trattato di musica

9) *Introduzione armonica* trattato di musica

...

Contributo di Euclide alla teoria dei numeri primi

“*Dimostrazione dell'infinità dei numeri primi*” Da “I problemi del millennio” di Keith Devlin (Longanesi) pag 76 -77:

“ Appendice 1

I numeri primi sono infiniti.

La dimostrazione di Euclide

Chiaramente, Euclide non poteva dimostrare che esistono infiniti numeri primi elencandoli tutti. Quel che egli fece, piuttosto, fu di dimostrare che non esiste un numero primo più grande di tutti gli altri. Ecco una versione moderna della sua dimostrazione.

Supponiamo che esiste un numero primo maggiore di tutti gli altri e che chiameremo P.

Ora, dice Euclide, moltiplichiamo tutti i numeri primi, da 2 a P compresi. No, non occorre eseguire effettivamente tutti i calcoli: E come potreste farlo, visto che non disponete di un valore reale di P? Indichiamo invece con N il risultato di questo calcolo, qualunque esso sia. In altre parole:

$$N = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times \dots \times P$$

Consideriamo ora il numero  $N + 1$ . Ovviamente è più grande di P. Euclide affermò che questo numero  $N + 1$  è un numero primo. Se aveva ragione, questo dimostra che non esiste un numero primo maggiore di tutti gli altri. Perché? Be', ritorniamo a quello che abbiamo appena detto.

Abbiamo cominciato supponendo (forse contro il buon senso) che in effetti esista un numero primo maggiore di tutti gli altri e abbiamo deciso di chiamarlo P. Poi, procedendo come indicatola Euclide, abbiamo trovato un numero primo,  $N + 1$ , che è ancora più grande di P. Ancora più grande del più grande? Ma per piacere! Questa è una situazione logica incoerente. Poiché siamo arrivati a questo stato di cose supponendo che esistesse un numero primo più grande di tutti gli altri, la fonte dell'incoerenza deve essere proprio nella premessa (la sola altra cosa che abbiamo fatto è stata quella di dare a quel numero primo più grande di tutti il nome P, e poi di specificare in che modo ottenere il numero N per semplice moltiplicazione, e nessuno di questi due passaggi poteva dar luogo a un'incoerenza. La conclusione è, pertanto, che in effetti non esiste un numero primo più grande di tutti gli altri. Ma come fece Euclide a dimostrare che il numero  $N + 1$  è un numero primo? Questo è il passaggio che abbiamo temporaneamente accantonato nella discussione precedente. Euclide cominciò il suo ragionamento chiedendosi che cosa accadrebbe se  $N + 1$  non fosse un numero primo: In quel caso, grazie al teorema fondamentale dell'aritmetica,  $N+1$  dovrebbe essere un prodotto di numeri primi. In particolare,  $N + 1$  potrebbe essere diviso per un numero primo più piccolo, che chiameremo M. Ma M è un divisore di N (poiché N è il prodotto di tutti i numeri primi. Pertanto, quando si cerca di dividere  $N+1$  per M ci si ritrova con il resto di 1. Ancora una volta, ecco una situazione incoerente:  $N + 1$  è divisibile per M e d'altra parte la divisione da un resto

di 1.. Ancora una volta, questo significa che la nostra premessa iniziale – in questo caso la supposizione che  $N + 1$  non fosse un numero primo – dev'essere falsa. Pertanto (basandosi sull'assunto che  $P$  sia il numero primo maggiore di tutti),  $N + 1$  è, effettivamente, un numero primo.”

(esistono altre dimostrazioni dell'infinità dei numeri primi)

**Nostro contributo** moderno, ma per l'infinità dei numeri primi gemelli, con un ragionamento simile: supposta un'ultima coppia di primi gemelli, se ne può trovare un'altra ancora più grande.

Come Euclide dimostrò, come sopra, l'inesistenza di un numero primo più grande di tutti gli altri, noi abbiamo fatto la stessa cosa con le coppie di numeri primi gemelli, poiché, presunta una coppia di gemelli più grande di tutte le altre, dimostriamo che tale coppia non possa essere l'ultima, e che quindi ce ne sono di ancora più grandi. Infatti, essendo la forma dei numeri primi  $P = 6k \pm 1$  (con l'eccezione del 2 e del 3, con lieve eccesso per  $6k - 1$ , vedi Nota 1), tutti i numeri primi possono essere messi su due colonne (sempre tranne il 2 e il 3). Dopo la presunta ultima coppia di gemelli, affinché non ce ne siano di più grandi, dovrebbe verificarsi uno dei seguenti casi:

a) dalla presunta ultima coppia di gemelli, tutti numeri primi dovrebbero disporsi nella prima colonna ( $6k - 1$ ), oppure nella seconda colonna, ( $6k + 1$ ) e viceversa, tutti i numeri composti nella seconda colonna (o nella prima).

b) Tutti i numeri primi dovrebbero essere, da quel punto in poi, tanti quanti i numeri composti (cosa impossibile, poiché i numeri composti crescono più velocemente dei numeri primi), analogamente ai numeri pari e dispari; e anche perfettamente alternati, in modo che per lo stesso  $k$  si avrebbero sempre un numero primo e un numero composto  $c = p + 2$ , in modo che non ci siano mai più due numeri primi con lo stesso  $k$  tali che  $6k - 1$  e

$6k + 1$ , e quindi con differenza 2, siano sulla stessa coppia nelle due colonne, ma solo  $p$  e  $c$  oppure  $p$  e  $c$ , ma mai  $p$  e  $p' = p + 2$ .

Il caso a) è impossibile perchè, estendendo all'infinito le due colonne ( $k$  tendente all'infinito) i numeri primi si dividono quasi equamente su tutte e due le colonne;

Il caso b) è altrettanto impossibile, poiché per ogni  $N$  crescente all'infinito, il numero dei numeri primi fino a  $N$  non è mai uguale a quello dei numeri composti, anzi questi ultimi sono sempre in numero maggiore dei primi, per la nota stima logaritmica, il rapporto tra i secondi e i primi è circa il logaritmo naturale di  $N$ .

Di conseguenza, così come non esiste un numero primo più grande di tutti gli altri, non esiste, e non può esistere, nemmeno una coppia di numeri gemelli più grande di tutte le altre che la precedono.

***Caltanissetta 15.12.2010***

***Riferimenti*** sul nostro sito:

1) “I numeri primi gemelli e l'ipotesi di Riemann generalizzata” a cura della Prof. Annarita Tulumello, in sezione “Lavori su Riemann” del nostro sito [www.gruppoeratostene.com](http://www.gruppoeratostene.com)

2) “ ***I NUMERI PRIMI DI EUCLIDE (O EUCLIDEI)***

***(e le forme  $6k \pm 1$ )***”, e di forma  $N + 1 = 6k + 1$ , con  $N$  prodotto di tutti i primi precedenti (e quindi sono i cosiddetti “numeri primoriali”, indicati col simbolo  $p\#$ ) come nella dimostrazione di Euclide. A cura della prof. Tulumello, in sezione “Articoli sui Numeri primi”

Nota 1. Colonne  $6k \pm 1$  e *numeri primi*

<u>k</u>	<u>6k -1</u>	<u>6 k +1</u>	
1	<b>5</b>	<b>7</b>	<i>primi e gemelli</i>
2	<b>11</b>	<b>13</b>	<i>primi e gemelli</i>
3	<b>17</b>	<b>19</b>	<i>primi e gemelli</i>
4	<b>23</b>	<b>25</b>	<i>23 primo, 25 no</i>
5	<b>29</b>	<b>31</b>	<i>primi e gemelli</i>
6	<b>35</b>	<b>37</b>	<i>37 primo</i>
7	<b>41</b>	<b>43</b>	<i>primi e gemelli</i>
8	<b>47</b>	<b>49</b>	<i>47 primo</i>
9	<b>53</b>	<b>55</b>	<i>53 primo</i>
10	<b>59</b>	<b>61</b>	<i>primi e gemelli</i>
...	...	...	

Come si nota facilmente, i numeri primi si distribuiscono in misura quasi uguale nella prima colonna e nella seconda colonna (rispettivamente 9 e 7 rispettivamente, ma al crescere di k la quasi eguaglianza si mantiene sempre meglio), per cui in nessuna colonna da un certo punto in poi non ci saranno più numeri primi, e nemmeno si alterneranno perfettamente con i numeri composti; e quindi, di conseguenza, non ci sarà mai un “ultima” coppia di gemelli g, e quindi essi sono infiniti, con una frequenza media fino a qualsiasi numero naturale N

$$g(N) \sim 1,32033... * N / (\ln N)^2$$

dove 1,32033... è una costante.