Problemi di Analisi Matematica proposti dal Dott. Ing. Pasquale Cutolo

Problema n. 1c

Partendo dalla relazione dei complementi:

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{Sin(\pi z)}, \quad 0 < z < 1, \qquad (1c)$$

e ponendo $z=\frac{1}{2}-x$,

dimostrare che:

$$\int_0^\infty \frac{Sinh(ux)}{Sinh(\frac{u}{2})}du=\pi Tan(\pi x), \qquad |x|<\frac{1}{2}$$

$Tan(\pi x)$ è la tangente di (πx)

Problema n. 2c

Partendo dalla relazione

$$\int_0^\infty \frac{Sinh(ux)}{Sinh(\frac{u}{2})}du=\pi Tan(\pi x), \qquad |x|<\frac{1}{2},$$

e derivando, (2n-1) volte, rispetto ad x, (n = 1,2,…), si ottiene:

$$\int_0^\infty \frac{u^{2n-1}Cosh(ux)}{Sinh(\frac{u}{2})}du=[\pi Tan(\pi x)]^{(2n-1)} = \pi^{2n}\sum_{h=0}^{n}a_h[Tan(\pi x)]^{2h}, \qquad (2c)$$

Si chiede di fornire:

1) l'espressione che definisce a_0 in funzione di n;
2) l'espressione che definisce la $\sum_{h=0}^{n}a_h$ in funzione di n;
3) l'espressione che definisce il rapporto $[\sum_{h=0}^{n}a_h]/a_0$ in funzione di n;
4) l'espressione che definisce a_n in funzione di n.

Problema n. 3c

Partendo dalla relazione:

$$\int_0^\infty \frac{Sinh(ux)}{Sinh(\frac{u}{2})}du=\pi Tan(\pi x), \qquad |x|<\frac{1}{2},$$

e derivando, (2n) volte, rispetto ad x, (n = 1,2,3,…), si ottiene:

$$\int_0^\infty \frac{u^{2n}Sinh(ux)}{Sinh(\frac{u}{2})}du=[\pi Tan(\pi x)]^{(2n)} = \pi^{2n+1}\sum_{h=0}^{n}b_h[Tan(\pi x)]^{2h+1}, \qquad (3c).$$

Si chiede di fornire :

1) l'espressione che definisce b_0 in funzione di n;

2) l'espressione che definisce la $\sum_{h=0}^{n} b_h$ in funzione di n;

3) l'espressione che definisce b_n in funzione di n.

Problema n.4c

Partendo dalla relazione

$$\int_0^\infty \frac{u^{2n} Sinh(ux)}{Sinh(\frac{u}{2})} du = [\pi Tan(\pi x)]^{(2n)}, \qquad |x| < \frac{1}{2},$$

e ponendo, x = 0, dimostrare che:

$$\frac{2}{2n+1} \sum_{h=1}^{n} \binom{2n+1}{2h} (2^{2h} - 1) B_{2h} = 1, \qquad (4c)$$

dove B_{2h} rappresenta il numero di Bernoulli di indice 2h, (n = 1,2,3…).

Problema n. 5c

Partendo dalla relazione:

$$\int_0^\infty \frac{u^{2n} Sinh(ux)}{Sinh(\frac{u}{2})} du = [\pi Tan(\pi x)]^{(2n)}, \qquad |x| < \frac{1}{2},$$

e ponendo, x = ¼, dimostrare che:

$$\sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{(1+2k)^{2n+1}} = \frac{(-1)^{n-1} \pi^{2n+1}}{2^{2n+2}(2n+1)!} [\sum_{h=1}^{n} \binom{2n+1}{2h} 2^{2h} (2^{2h} - 1) B_{2h} - (2n+1)]$$

dove B_{2h} rappresenta il numero di Bernoulli di indice 2h, (n = 1,2,3…).

Problema n. 6c

Partendo dalla relazione:

$$\int_0^\infty \frac{u^{2n-1} Cosh(ux)}{Sinh(\frac{u}{2})} du = [\pi Tan(\pi x)]^{(2n-1)}, \qquad |x| < \frac{1}{2},$$

e ponendo, x = ¼, dimostrare che:

$$\zeta(2n) = \frac{2^{2n-1} \pi^{2n}}{(2n)!} |B_{2n}|$$

dove B_{2n} rappresenta il numero di Bernoulli di indice 2n, (n = 1,2,3,…).

Problema n. 7c

Partendo dalla relazione:

$$[\pi Tan(\pi x)]^{(2n-1} = \pi^{2n}\sum_{h=0}^{n} a_h [Tan(\pi x)]^{2h}, \qquad |x| < \frac{1}{2},$$

fornire l'espressione che definisce a_h, (h = 0,1,2,3,…,n), in funzione di n, (n = 1,2,3,…).

Problema n. 8c

Partendo dalla relazione:

$$[\pi Tan(\pi x)]^{(2n)} = \pi^{2n+1}\sum_{h=0}^{n} b_h [Tan(\pi x)]^{2h+1}, \qquad |x| < \frac{1}{2},$$

fornire l'espressione che definisce b_h, (h = 0,1,2,3,…,n), in funzione di n, (n = 1,2,3,…).

Problema n. 1p

Partendo dalla relazione dei complementi:

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{Sin(\pi z)}, \quad 0 < z < 1,$$

e ponendo $z = \frac{1}{2} - x$,

dimostrare che:

$$\int_0^\infty \frac{Cosh(ux)}{Cosh(\frac{u}{2})} du = \frac{\pi}{Cos(\pi x)}, \qquad |x| < \frac{1}{2}, \qquad (1p)$$

Problema n. 2p

Partendo dalla relazione

$$\int_0^\infty \frac{Cosh(ux)}{Cosh(\frac{u}{2})} du = \frac{\pi}{Cos(\pi x)}, \qquad |x| < \frac{1}{2},$$

e derivando, (2n-1) volte, rispetto ad x, (n = 1,2,3,…), si ottiene:

$$\int_0^\infty \frac{u^{2n-1} Sinh(ux)}{Cosh(\frac{u}{2})} du = [\frac{\pi}{Cos(\pi x)}]^{(2n-1)} =$$

$$= 2\pi^{2n}(-1)^n(-i)^{-1}\sum_{k\ge 0}(-1)^k(1+2k)^{2n-1}e^{-i\pi x(1+2k)} \qquad (2p).$$

Ciò premesso, si chiede di dimostrare che:

1) $\frac{1}{2n}\sum_{h=1}^{n}\binom{2n}{2h} 2^{2h}(2^{2h}-1)B_{2h} = 1$

dove B_{2h} rappresenta il numero di Bernoulli di indice 2h;

2) $\sum_{k\ge 0}(-1)^k[\frac{1}{(1+4k)^{2n}} - \frac{1}{(3+4k)^{2n}}] =$

$$=\pi^{2n}(-1)^{n-1}\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{4^{2n}(2n)!}[\sum_{h=1}^{n}\binom{2n}{2h}4^{4h}(2^{2h}-1)B_{2n}-4n]$$

Problema n. 3p

Partendo dalla relazione

$$\int_0^\infty \frac{Cosh(ux)}{Cosh(\frac{u}{2})}du=\frac{\pi}{Cos(\pi x)}, \qquad |x|<\frac{1}{2},$$

e derivando, (2n) volte, rispetto ad x, (n = 1,2,3,…), si ottiene:

$$\int_0^\infty \frac{u^{2n}Cosh(ux)}{Cosh(\frac{u}{2})}du=[\frac{\pi}{Cos(\pi x)}]^{(2n-1)}=$$

$$=2\pi^{2n+1}(-1)^n\sum_{k\geq 0}(-1)^k(1+2k)^{2n}e^{-i\pi x(1+2k)} \qquad (3p)$$

Ciò premesso, si chiede di dimostrare che:

1) $\sum_{k\geq 0}\frac{(-1)^k}{(1+2k)^{2n+1}}=\frac{(-1)^{n-1}\pi^{2n+1}}{2^{2n+2}(2n+1)!}[\sum_{h=1}^{n}\binom{2n+1}{2h}2^{2h}(2^{2h}-1)B_{2h}-(2n+1)]$;

2) $\sum_{k\geq 0}(-1)^k[\frac{1}{(1+4k)^{2n+1}}+\frac{1}{(3+4k)^{2n+1}}]=$

$$=\frac{(-1)^{n-1}\pi^{2n+1}\sqrt{2}}{4^{2n+1}2(2n+1)!}[\sum_{h=1}^{n}\binom{2n+1}{2h}4^{2h}(2^{2h}-1)B_{2h}-2(2n+1)];$$

B_{2h} rappresenta il numero di Bernoulli di indice 2h.

Problema n. 4p

Utilizzando la relazione

$$\int_0^\infty \frac{t^{z-1}dt}{1+t}=\frac{\pi}{Sin\pi z}, \ 0<z<1,$$

e ponendo z = 1/n, con n > 1, dimostrare che:

$$\sum_{k=1}^{n}k[Cos\frac{2\pi k}{n}-Cos\frac{2\pi(k-1)}{n}]=n$$

Fiuggi, Agosto 2010
Dott. Ing. Pasquale Cutolo

Risoluzione dei problemi di Analisi Matematica proposti dal Dott. Ing. Pasquale Cutolo

Risoluzione del Problema n. 1c

E' nota la seguente relazione dei complementi:

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{Sin(\pi z)}, \qquad 0<z<1 \tag{1c.1}$$

essendo, $\Gamma(z)=\int_0^\infty t^{z-1}e^{-z}$, la ben nota funzione di Eulero di seconda specie.

Ponendo, nella (1c.1), $z=\frac{1}{2}-x$, e prendendo il logaritmo naturale di ambo i membri della (1c.1), otteniamo:

$$\ln\Gamma(\frac{1}{2}-x)+\ln\Gamma(\frac{1}{2}+x) = \ln\pi-\ln Cos(\pi x) \tag{1c.2}$$

Derivando, rispetto ad x, i due membri della (1c.2), ricaviamo:

$$\Psi(\frac{1}{2}+x)-\Psi(\frac{1}{2}-x)=\pi Tan(\pi x), \tag{1c.3}$$

essendo $\Psi(x)=\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$, e $Tan(\pi x)$ rappresenta la tangente di (πx).

Ricordando che $\Psi(x)=\int_0^1 \frac{t^{x-1}-1}{t-1}dt+\gamma$, essendo γ la costante di Eulero-Mascheroni, dalla (1c.3) ricaviamo:

$$\int_0^1 \frac{t^{x-1/2}-t^{-x-1/2}}{t-1}dt=(t=e^{-u})=\int_0^\infty \frac{e^{-u(x-1/2)}-e^{-u(-x-1/2)}}{e^{-u}-1}e^{-u}du =$$

$$=\int_0^\infty \frac{(e^{ux}-e^{-ux})e^{u/2}}{e^u-1}du=\int_0^\infty \frac{Sinh(ux)}{Sinh(u/2)}du = \pi Tan(\pi x) , \quad |x|<\frac{1}{2} \tag{1c.4}$$

Risoluzione del Problema n. 2c

Punto 1)-Derivando, (2n-1) volte, rispetto ad x, (n = 1,2,3,…), la relazione:

$\int_0^\infty \frac{Sinh(ux)}{Sinh(u/2)}du = \pi Tan(\pi x)$, ricaviamo:

$$\int_0^\infty \frac{u^{2n-1}Cosh(ux)}{Sinh(u/2)}du = [\pi Tan(\pi x)]^{(2n-1)} = \pi^{2n}\sum_{h=0}^{n} a_h [Tan(\pi x)]^{2h} \tag{2c.1}$$

Dalla (2c.1) ricaviamo:

$$[\pi Tan(\pi x)]^{(2n-1)} = [\frac{\pi}{i}(1-\frac{2}{e^{2\pi ix}+1})]^{(2n-1)} = \frac{-2\pi}{i}[\sum_{k\geq 0}(-1)^k e^{-2\pi ix(1+k)}]^{(2n-1)} =$$

$=\frac{-2\pi}{i}\sum_{k\geq 0}(-1)^k[-2\pi i(1+k)]^{2n-1}e^{-2\pi ix(1+k)}$, $i=\sqrt{-1}$; sostituendo k a (1+k), abbiamo:

$$[\pi Tan(\pi x)]^{(2n-1)} = 2^{2n}\pi^{2n}(-1)^n\sum_{k\geq 1}(-1)^k k^{2n-1}e^{-2\pi ixk} \tag{2c.2}$$

Ponendo, nella (2c.1) e (2c.2), x = 0, troviamo:

$$\int_0^\infty \frac{u^{2n-1}}{Sinh(u/2)}du = \pi^{2n}a_0 = 2^{2n}\pi^{2n}(-1)^n\sum_{k\geq 1}(-1)^k k^{2n-1} \qquad (2c.3)$$

Osserviamo che:

$$\sum_{k\geq 1}(-1)^k k^{2n-1} = \sum_{k\geq 1}(2k)^{2n-1} - \sum_{k\geq 1}(2k-1)^{2n-1} =$$
$$\sum_{k\geq 1}(2k)^{2n-1} - [\sum_{k\geq 1}(2k-1)^{2n-1} + \sum_{k\geq 1}(2k)^{2n-1} - \sum_{k\geq 1}(2k)^{2n-1}] =$$
$$= \sum_{k\geq 1}(2k)^{2n-1} - \sum_{k\geq 1}k^{2n-1} + \sum_{k\geq 1}(2k)^{2n-1} = (2^{2n}-1)\zeta(1-2n)\,; \qquad (2c.4)$$

ricordando che $\zeta(1-2n) = -\frac{B_{2n}}{2n}$, e $\zeta(-2n) = 0$,

troviamo che: $\sum_{k\geq 1}(-1)^k k^{2n-1} = (2^{2n}-1)(-\frac{B_{2n}}{2n})$ (2c.5)

essendo B_{2n} il numero di Bernoulli di indice 2n, mentre $\zeta(s)$ è la funzione

Zeta di Riemann, definita da: $\zeta(s) = \sum_{k\geq 1}\frac{1}{k^s}$, Re(s) > 1.

Sostituendo il risultato della (2c.5) nella (2c.3), otteniamo:

$$\pi^{2n}a_0 = 2^{2n}\pi^{2n}(-1)^{n-1}(2^{2n}-1)\frac{B_{2n}}{2n}$$

Ricordando che $(-1)^{n-1}B_{2n} = |B_{2n}|$, abbiamo:

$$a_0 = 2^{2n}(-1)^{n-1}(2^{2n}-1)\frac{B_{2n}}{2n} = 2^{2n}(2^{2n}-1)\frac{|B_{2n}|}{2n} \qquad (2c.6)$$

che rappresenta il termine noto, in funzione di n, del polinomio in $Tan(\pi x)$, di grado 2n.

Osserviamo che, per n intero positivo, a_0 risulta sempre intero positivo; poiché $|B_{2n}|$ è dato dal rapporto di due numeri interi, indicando con p e q detti numeri interi, ($|B_{2n}|$ = p/q), l'espressione (2c.6) indica che a_0 è un multiplo intero del numero intero q e di 2n.

L'espressione di a_0 possiamo ricavarla anche utilizzando la relazione (2c.3), cioè:

$$\int_0^\infty \frac{u^{2n-1}}{Sinh(u/2)}du = \pi^{2n}a_0 = 2\int_0^\infty u^{2n-1}e^{-u/2}\sum_{k\geq 0}e^{-uk}du = 2\sum_{k\geq 0}\frac{(2n-1)!}{(\frac{1}{2}+k)^{2n}} =$$

$$= 2^{2n+1}(2n-1)!\sum_{k\geq 0}\frac{1}{(1+2k)^{2n}}\text{ ; ma}$$

$$\sum_{k\geq 0}\frac{1}{(1+2k)^{2n}} = \sum_{k\geq 0}\frac{1}{(1+2k)^{2n}} + \sum_{k\geq 1}\frac{1}{(2k)^{2n}} - \sum_{k\geq 1}\frac{1}{(2k)^{2n}} = \sum_{k\geq 1}\frac{1}{(k)^{2n}} - \sum_{k\geq 1}\frac{1}{(2k)^{2n}} =$$
$$= (1-2^{-2n})\zeta(2n)\,;$$

ricordando che: $\zeta(2n) = \frac{2^{2n-1}\pi^{2n}}{(2n)!}|B_{2n}|$, (2c.7)

otteniamo:

$$2^{2n+1}(2n-1)!\sum_{k\geq 0}\frac{1}{(1+2k)^{2n}} = 2^{2n+1}(2n-1)!(1-2^{-2n})\frac{2^{2n-1}\pi^{2n}}{(2n)!}|B_{2n}| = \pi^{2n}a_0\text{, da cui:}$$

$$a_0 = 2^{2n}(2^{2n}-1)\frac{|B_{2n}|}{2n}$$
La relazione (2c.6) è stata verificata con un programma di matematica.

Punto 2) -Utilizzando le relazioni (2c.1) e (2c.2), e ponendo, x = ¼, troviamo:

$$\pi^{2n}\sum_{h=0}^{n} a_h = 2^{2n}\pi^{2n}(-1)^n\sum_{k\geq 1}(-1)^k k^{2n-1}e^{-2\pi ik/4} = 2^{2n}\pi^{2n}(-1)^n\sum_{k\geq 1}(-1)^k k^{2n-1}(-i)^k \text{ , cioè:}$$

$$\sum_{h=0}^{n} a_h = 2^{2n}(-1)^n\sum_{k\geq 1}(i)^k k^{2n-1} = 2^{2n}(-1)^n[\sum_{k\geq 1}(-1)^k(2k)^{2n-1} + \sum_{k\geq 1}(i)^{2k-1}(2k-1)^{2n-1}];$$

uguagliando le parti reali, troviamo:

$$\sum_{h=0}^{n} a_h = 2^{2n}(-1)^n\sum_{k\geq 1}(-1)^k(2k)^{2n-1} \;\; ;$$

utilizzando la (2c.4), abbiamo:

$$\sum_{h=0}^{n} a_h = 2^{2n}2^{2n-1}(-1)^n(2^{2n}-1)\zeta(1-2n) = 2^{4n-1}(-1)^{n-1}(2^{2n}-1)\frac{B_{2n}}{2n} =$$

$$= 2^{4n-1}(2^{2n}-1)\frac{|B_{2n}|}{2n}, \qquad (2c.8)$$

La relazione (2c.8) è stata verificata con un programma di matematica.

Punto 3)- Dividendo il risultato della (2c.8) con quello della (2c.6), otteniamo:

$$(\sum_{h=0}^{n} a_h)/a_0 = 2^{2n-1} \qquad (2c.9)$$

Punto 4)- Derivando successivamente, (2n-1) volte, rispetto ad x, la funzione $Tan(x)$, constatiamo facilmente che il coefficiente a_n del termine di grado 2n, del polinomio $\sum_{h=0}^{n} a_h[Tan(x)]^{2h}$, è uguale a (2n-1)!

Risoluzione del Problema n. 3c

Punto 1)-Derivando, (2n) volte, rispetto ad x, (n = 1,2,3,…), la relazione:

$$\int_0^\infty \frac{Sinh(ux)}{Sinh(u/2)}du = \pi Tan(\pi x) \text{ , otteniamo:}$$

$$\int_0^\infty \frac{u^{2n}Sinh(ux)}{Sinh(u/2)}du = \pi[Tan(\pi x)]^{2n} = \pi^{2n+1}\sum_{h=0}^{n} b_h[Tan(\pi x)]^{2h+1} =$$

$$= \frac{-2\pi}{i}[\sum_{k\geq 0}(-1)^k e^{-2\pi ix(1+k)}]^{(2n)} = \frac{-2\pi}{i}\sum_{k\geq 0}(-1)^k(-2\pi i)^{2n}(1+k)^{2n}e^{-2\pi ix(1+k)} =$$

$$= \frac{(2\pi)^{2n+1}(-1)^n}{i}\sum_{k\geq 1}(-1)^k k^{2n}e^{-2\pi ixk} \;, \qquad |x| < \frac{1}{2}, \qquad (3c.1)$$

Ponendo nella precedente (3c.1), x = ¼, abbiamo:

$$\int_0^\infty \frac{u^{2n}Sinh(u/4)}{Sinh(u/2)}du = \pi^{2n+1}\sum_{h=0}^{n} b_h = \frac{(2\pi)^{2n+1}(-1)^n}{i}\sum_{k\geq 1}(-1)^k k^{2n}(-i)^k \text{ , da cui:}$$

$$\sum_{h=0}^{n} b_h = \frac{2^{2n+1}(-1)^n}{i}\sum_{k\geq 1}(i)^k (k)^{2n}$$, ma $\sum_{k\geq 1}(i)^k (k)^{2n} = \sum_{k\geq 1}(-1)^k (2k)^{2n} + \sum_{k\geq 1}(i)^{2k-1}(2k-1)^{2n}$;

quindi: $\sum_{h=0}^{n} b_h = \frac{2^{2n+1}(-1)^n}{i}[\sum_{k\geq 1}(-1)^k (2k)^{2n} + \sum_{k\geq 1}(i)^{2k-1}(2k-1)^{2n}]$.

Dalla precedente, uguagliando le parti reali, ricaviamo:

$\sum_{h=0}^{n} b_h = \frac{2^{2n+1}(-1)^n}{i}\sum_{k\geq 1}(i)^{2k-1}(2k-1)^{2n} = 2^{2n+1}(-1)^{n-1}\sum_{k\geq 1}(-1)^k (2k-1)^{2n}$, ma:

$$\sum_{k\geq 1}(-1)^k (2k-1)^{2n} = \sum_{k\geq 1}(-1)^k (1-2k)^{2n} = \sum_{k\geq 1}(-1)^k \sum_{h\geq 0}\binom{2n}{h}(-2k)^h =$$

$$= \sum_{k\geq 1}(-1)^k + \sum_{h\geq 1}\binom{2n}{h}(-2)^h \sum_{k\geq 1}(-1)^k k^h ;$$

poiché $\sum_{k\geq 1}(-1)^k = -\frac{1}{2}$, (3c.2)

e ricordando che: $\zeta(-2n) = 0$, otteniamo:

$$\sum_{k\geq 1}(-1)^k (2k-1)^{2n} = -\frac{1}{2} + \sum_{h\geq 1}\binom{2n}{2h-1}(-2)^{2h-1}\sum_{k\geq 1}(-1)^k k^{2h-1}$$

Ricordando che : $\sum_{k\geq 1}(-1)^k k^{2h-1} = (2^{2h}-1)\zeta(1-2h) = (2^{2h}-1)(-\frac{B_{2h}}{2h})$, abbiamo:

$$\sum_{k\geq 1}(-1)^k (2k-1)^{2n} = -\frac{1}{2} - \sum_{h\geq 1}\binom{2n}{2h-1}(-2)^{2h-1}(2^{2h}-1)\frac{B^{2h}}{2h} ;$$

osserviamo che: $\binom{2n}{2h-1}\frac{1}{2h} = \frac{1}{2n+1}\binom{2n+1}{2h}$; pertanto:

$\sum_{k\geq 1}(-1)^k (2k-1)^{2n} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2n+1}\sum_{h\geq 1}\binom{2n+1}{2h}(-2)^{2h-1}(2^{2h}-1)B_{2h}$, e quindi,

essendo: $\sum_{h=0}^{n} b_h = 2^{2n+1}(-1)^{n-1}\sum_{k\geq 1}(-1)^k (2k-1)^{2n}$, abbiamo:

$$\sum_{h=0}^{n} b_h = 2^{2n}(-1)^{n-1}[\frac{1}{2n+1}\sum_{h=1}^{n}\binom{2n+1}{2h}2^{2h}(2^{2h}-1)B_{2h} - 1] \tag{3c.3}$$

La relazione (3c.3) è stata verificata con un programma di matematica.

Punto 2)- Ponendo, nella (3c.1), $Tan(\pi x) = t$, da cui $\pi x = ArcTan(t)$, abbiamo:

$$\int_0^\infty \frac{u^{2n} Sinh[u\frac{1}{\pi}ArcTan(t)]}{Sinh(u/2)}du = \pi^{2n+1}\sum_{h=0}^{n} b_h [t]^{2h+1} \tag{3c.4}$$

Derivando la precedente, rispetto a (t), e ponendo dopo, t = 0, troviamo:

$\lim_{t\to 0} D_t \int_0^\infty \frac{u^{2n} Sinh[u\frac{1}{\pi}ArcTan(t)]}{Sinh(u/2)}du = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{u^{2n+1}}{Sinh(u/2)}du = \pi^{2n+1}b_0$, da cui:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty u^{2n+1}e^{-u/2}\sum_{k\geq 0}e^{-uk}du \ = \ \frac{2}{\pi}\sum_{k\geq 0}\frac{(2n+1)!}{(\frac{1}{2}+k)^{2n+2}} = \frac{2^{2n+3}(2n+1)!}{\pi}\sum_{k\geq 0}\frac{1}{(1+2k)^{2n+2}} \ ;$$

ricordando che: $\sum_{k\geq 0}\frac{1}{(1+2k)^{2n+2}} = [1-2^{-(2n+2)}]\zeta(2n+2)$, otteniamo:

$$\pi^{2n+1}b_0 \ = \ \frac{2^{2n+3}(2n+1)!}{\pi}[1-2^{-(2n+2)}]\zeta(2n+2) \ = \ \frac{2(2n+1)!}{\pi}(2^{2n+2}-1)\zeta(2n+2)\ ;$$

ma: $\quad \zeta(2n+2) = \frac{2^{2n+1}\pi^{2n+2}}{(2n+2)!}\left|B_{2n+2}\right|$, e quindi:

$$b_0 \ = \ \frac{1}{n+1}(2^{2n+2}-1)2^{2n+1}\left|B_{2n+2}\right| \qquad (3c.5)$$

La relazione (3c.5) è stata verificata con un programma di matematica.

Punto 3)- Derivando successivamente, (2n) volte, rispetto ad x, la funzione $Tan(x)$, constatiamo facilmente che il coefficiente b_n del termine di grado 2n+1, del polinomio $\sum_{h=0}^{n} b_h[Tan(x)]^{2h+1}$, è uguale a (2n)!

Risoluzione del Problema n. 4c

Utilizzando la relazione

$$\int_0^\infty \frac{u^{2n}Sinh(ux)}{Sinh(u/2)}du \ = \ \pi[Tan(\pi x)]^{2n} \ = \ \frac{-2\pi}{i}\sum_{k\geq 0}(-1)^k(-2\pi i)^{2n}(1+k)^{2n}e^{-2\pi ix(1+k)}\ ,$$

e ponendo, x = 0, otteniamo:

$\sum_{k\geq 0}(-1)^k(1+k)^{2n} \ = 0$, da cui:

$$\sum_{k\geq 0}(-1)^k(1+k)^{2n} \ = 1+\sum_{k\geq 1}(-1)^k\sum_{h\geq o}\binom{2n}{h}k^h \ = 1+\sum_{k\geq 1}(-1)^k+\sum_{h\geq 1}\binom{2n}{h}\sum_{k\geq 1}(-1)^k k^h\ ;$$

ricordiamo che: $\sum_{k\geq 1}(-1)^k \ = -\frac{1}{2}$, e $\zeta(-2h)=0$, (h = 1,2,3,…); pertanto:

$$\sum_{k\geq 0}(-1)^k(1+k)^{2n} \ = \frac{1}{2}+\sum_{h\geq 1}\binom{2n}{2h-1}\sum_{k\geq 1}(-1)^k k^{2h-1}\ ;$$

ricordiamo che: $\sum_{k\geq 1}(-1)^k k^{2h-1} \ = \ (2^{2h}-1)\zeta(1-2h) = (2^{2h}-1)(-\frac{B_{2h}}{2h})$, e quindi:

$$\sum_{k\geq 0}(-1)^k(1+k)^{2n} \ = \frac{1}{2}+\sum_{h\geq 1}\binom{2n}{2h-1}(2^{2h}-1)(-\frac{B_{2h}}{2h})\ ;$$

ricordando che: $\binom{2n}{2h-1}\frac{1}{2h} = \frac{1}{2n+1}\binom{2n+1}{2h}$, troviamo:

$\frac{1}{2}-\frac{1}{2n+1}\sum_{h\geq 1}\binom{2n+1}{2h}(2^{2h}-1)B_{2h} \ = 0$, da cui:

$$\frac{2}{2n+1}\sum_{h=1}^{n}\binom{2n+1}{2h}(2^{2h}-1)B_{2h}=1 \qquad (4c.1)$$

La formula (4c.1) è stata verificata con un programma di matematica.

Risoluzione del Problema n. 5c

Utilizzando la relazione

$$\int_0^\infty \frac{u^{2n}Sinh(ux)}{Sinh(u/2)}du = \pi[Tan(\pi x)]^{2n} = \frac{-2\pi}{i}\sum_{k\geq 0}(-1)^k(-2\pi i)^{2n}(1+k)^{2n}e^{-2\pi i x(1+k)} ,$$

e ponendo, x = ¼, troviamo:

$$\int_0^\infty \frac{u^{2n}Sinh(u/4)}{Sinh(u/2)}du = \int_0^\infty \frac{u^{2n}}{2Cosh(u/4)}du = \int_0^\infty u^{2n}e^{-u/4}\sum_{k\geq 0}(-1)^k e^{-uk/2}du =$$

$$=\sum_{k\geq 0}(-1)^k\frac{(2n)!}{(\frac{1}{4}+\frac{k}{2})^{2n+1}} = 4^{2n+1}(2n)!\sum_{k\geq 0}\frac{(-1)^k}{(1+2k)^{2n+1}} ;$$

$$\frac{-2\pi}{i}\sum_{k\geq 0}(-1)^k(-2\pi i)^{2n}(1+k)^{2n}e^{-2\pi i x(1+k)} = 2^{2n+1}\pi^{2n+1}(-1)^n\sum_{k\geq 0}(i)^k(1+k)^{2n} =$$

$$=2^{2n+1}\pi^{2n+1}(-1)^n[\sum_{k\geq 0}(-1)^k(1+2k)^{2n}+\sum_{k\geq 1}(i)^{2k-1}(2k)^{2n}]=4^{2n+1}(2n)!\sum_{k\geq 0}\frac{(-1)^k}{(1+2k)^{2n+1}} ;$$

uguagliando le parti reali, abbiamo:

$$4^{2n+1}(2n)!\sum_{k\geq 0}\frac{(-1)^k}{(1+2k)^{2n+1}} = 2^{2n+1}\pi^{2n+1}(-1)^n\sum_{k\geq 0}(-1)^k(1+2k)^{2n} ;$$

$$\sum_{k\geq 0}(-1)^k(1+2k)^{2n} = 1+\sum_{k\geq 1}(-1)^k\sum_{h\geq 0}\binom{2n}{h}(2k)^h = 1+\sum_{k\geq 1}(-1)^k+\sum_{h\geq 1}\binom{2n}{h}2^h\sum_{k\geq 1}(-1)^k k^h ;$$

ricordando che $\sum_{k\geq 1}(-1)^k = -\frac{1}{2}$, e che $\zeta(-2h)=0$, (h = 1,2,3,…), otteniamo:

$$\sum_{k\geq 0}(-1)^k(1+2k)^{2n} = \frac{1}{2}+\sum_{h\geq 1}\binom{2n}{2h-1}2^{2h-1}\sum_{k\geq 1}(-1)^k k^{2h-1} =$$

$$=\frac{1}{2}+\sum_{h\geq 1}\binom{2n}{2h-1}2^{2h-1}(2^{2h}-1)(-\frac{B_{2h}}{2h}) = \frac{1}{2}-\frac{1}{2n+1}\sum_{h\geq 1}\binom{2n+1}{2h}2^{2h-1}(2^{2h}-1)B_{2h}$$; quindi:

$$4^{2n+1}(2n)!\sum_{k\geq 0}\frac{(-1)^k}{(1+2k)^{2n+1}} = 2^{2n+1}\pi^{2n+1}(-1)^{n-1}[-\frac{1}{2}+\frac{1}{2n+1}\sum_{h\geq 1}\binom{2n+1}{2h}2^{2h-1}(2^{2h}-1)B_{2h}]$$; cioè:

$$\sum_{k\geq 0}\frac{(-1)^k}{(1+2k)^{2n+1}} = \frac{\pi^{2n+1}(-1)^{n-1}}{2^{2n+2}(2n+1)!}[\sum_{h=1}^{n}\binom{2n+1}{2h}2^{2h}(2^{2h}-1)B_{2h}-(2n+1)] \qquad (5c.1)$$

La formula (5c.1) è stata verificata con un programma di matematica.

Risoluzione Problema n. 6c

Utilizzando la relazione

$$\int_0^\infty \frac{u^{2n-1}Cosh(ux)}{Sinh(u/2)}du \;=\; 2^{2n}\pi^{2n}(-1)^n\sum_{k\ge1}(-1)^k k^{2n-1}e^{-2\pi ixk}\ ,$$

e ponendo, x = ¼, troviamo:

$$\int_0^\infty \frac{u^{2n-1}Cosh(u/4)}{Sinh(u/2)}du = \int_0^\infty \frac{u^{2n-1}}{2Sinh(u/4)}du = \sum_{k\ge0}\int_0^\infty u^{2n-1}e^{-u/4}e^{-uk/2}du \;=$$

$$= \sum_{k\ge0}\frac{(2n-1)!}{(\frac{1}{4}+\frac{k}{2})^{2n}} \;=\; 4^{2n}(2n-1)!\sum_{k\ge0}\frac{1}{(1+2k)^{2n}} \;=\; 2^{2n}\pi^{2n}(-1)^n\sum_{k\ge1}(-1)^k k^{2n-1}(-i)^k\ ;$$

ricordando che $\sum_{k\ge0}\frac{1}{(1+2k)^{2n}} = (1-2^{-2n})\zeta(2n)$, (n = 1,2,3,…), abbiamo:

$$4^{2n}(2n-1)!\sum_{k\ge0}\frac{1}{(1+2k)^{2n}} = 2^{2n}(2^{2n}-1)(2n-1)!\zeta(2n) \;=\; 2^{2n}\pi^{2n}(-1)^n\sum_{k\ge1}k^{2n-1}(i)^k\ ;$$

ricordando che la parte reale della sommatoria $\sum_{k\ge1}k^{2n-1}(i)^k$ è data da $\sum_{k\ge1}(2k)^{2n-1}(-1)^k$,

e poiché $\sum_{k\ge1}(2k)^{2n-1}(-1)^k \;=\; 2^{2n-1}\sum_{k\ge1}k^{2n-1}(-1)^k \;=\; 2^{2n-1}(2^{2n}-1)\zeta(1-2n) =$

$= 2^{2n-1}(2^{2n}-1)(-\frac{B_{2n}}{2n})$, abbiamo:

$2^{2n}(2^{2n}-1)(2n-1)!\zeta(2n) \;=\; 2^{2n}\pi^{2n}(-1)^n 2^{2n-1}(2^{2n}-1)(-\frac{B_{2n}}{2n})$, da cui :

$$\zeta(2n) = \frac{2^{2n-1}\pi^{2n}}{(2n)!}(-1)^{n-1}B_{2n} \;=\; \frac{2^{2n-1}\pi^{2n}}{(2n)!}\left|B_{2n}\right| \qquad (6c.1)$$

Ricordiamo che nel procedimento abbiamo utilizzato le formule:

$$\sum_{k\ge0}\frac{1}{(1+2k)^{2n}} = (1-2^{-2n})\zeta(2n)\ ,\quad \zeta(1-2n) = -\frac{B_{2n}}{2n}\quad ,\quad (-1)^{n-1}B_{2n} = \left|B_{2n}\right|$$

Risoluzione del Problema n. 7c

Riprendiamo la formula indicata in (2c.2)

$$[\pi Tan(\pi x)]^{(2n-1)} = \pi^{2n}\sum_{h=0}^{n}a_h[Tan(\pi x)]^{2h} \;=\; 2^{2n}\pi^{2n}(-1)^n\sum_{k\ge1}(-1)^k k^{2n-1}e^{-2\pi ixk}\ , \qquad (7c.1)$$

e poniamo $Tan(\pi x) = t$, da cui: $\pi x = ArcTan(t) = \frac{1}{2i}\ln\frac{1+it}{1-it}$,

che sostituita nella (7c.1) fornisce:

$$\sum_{h=0}^{n}a_h t^{2h} \;=\; 2^{2n}(-1)^n\sum_{k\ge1}(-1)^k k^{2n-1}e^{-k\ln\frac{1+it}{1-it}} \;=\; 2^{2n}(-1)^n\sum_{k\ge1}(-1)^k k^{2n-1}(\frac{1-it}{1+it})^k\ ; \qquad (7c.2)$$

derivando la (7c.2), (2h) volte, rispetto a t, e ponendo dopo, t = 0, abbiamo:

$$a_h(2h)! = [2^{2n}(-1)^n\sum_{k\ge1}(-1)^k k^{2n-1}(\frac{1-it}{1+it})^k]_{t=0}^{(2h)}\ ;$$

ora, $[(1-it)^k(1+it)^{-k}]_{t=0}^{(2h)} \;=\; \lim_{t\to0}\sum_{j=0}^{2h}\binom{2h}{j}[(1-it)^k]^{(2h-j)}[(1+it)^{-k}]^{(j)} =$

$$=\sum_{j=0}^{2h}\binom{2h}{j}\frac{\Gamma(k+1)(-i)^{2h-j}}{\Gamma(k+1-2h+j)}\frac{\Gamma(k+j)(-i)^{j}}{\Gamma(k)} = \sum_{j=0}^{2h}\binom{2h}{j}k(-1)^{h}\frac{\Gamma(k+j)}{\Gamma(k+1-2h+j)}=$$

$$=\sum_{j=0}^{2h}\binom{2h}{j}k(-1)^{h}(k+j-1)(k+j-2)...(k+j-2h+1);$$

ricordiamo che nello sviluppo delle derivate abbiamo utilizzate le formule seguenti:

$$D_x^{(n)}(a+bx)^{\alpha} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1-n)}b^{n}(a+bx)^{\alpha-n};\ D_x^{(n)}(a+bx)^{-\beta} = \frac{\Gamma(n+\beta)}{\Gamma(\beta)}(-b)^{n}(a+bx)^{-\beta-n};$$

inoltre, ricordiamo la ben nota relazione:

x(x-1)(x-2)…(x-n+1) = $\sum_{k=0}^{n}S(n,k)x^{k}$,

dove S(n,k) rappresentano i numeri di Stirling di prima specie.

Pertanto: $\sum_{j=0}^{2h}\binom{2h}{j}k(-1)^{h}(k+j-1)(k+j-2)...(k+j-2h+1)=$

$$=\sum_{j=0}^{2h}\binom{2h}{j}k(-1)^{h}\sum_{u=0}^{2h-1}S(2h-1,u)(k+j-1)^{u}=\sum_{j=0}^{2h}\binom{2h}{j}k(-1)^{h}\sum_{u=0}^{2h-1}S(2h-1,u)\sum_{p\ge0}\binom{u}{p}k^{p}(j-1)^{u-p};$$

quindi: $a_h(2h)! = 2^{2n}(-1)^{n}\sum_{k\ge1}(-1)^{k}k^{2n}\ \sum_{j=0}^{2h}\binom{2h}{j}(-1)^{h}\sum_{u=0}^{2h-1}S(2h-1,u)\sum_{p\ge0}\binom{u}{p}k^{p}(j-1)^{u-p}=$

$$=2^{2n}(-1)^{n}(-1)^{h}\sum_{j=0}^{2h}\binom{2h}{j}\sum_{u=0}^{2h-1}S(2h-1,u)\sum_{p\ge0}\binom{u}{p}(j-1)^{u-p}\sum_{k\ge1}(-1)^{k}k^{2n+p};$$

sappiamo che $\zeta(-2n-2p)$=0, (n + p intero > 0), e quindi:

$$a_h(2h)! = 2^{2n}(-1)^{n}(-1)^{h}\sum_{j=0}^{2h}\binom{2h}{j}\sum_{u=0}^{2h-1}S(2h-1,u)\sum_{p\ge1}\binom{u}{2p-1}(j-1)^{u-2p+1}\sum_{k\ge1}(-1)^{k}k^{2n+2p-1};$$

sappiamo che:

$$\sum_{k\ge1}(-1)^{k}k^{2n+2p-1} = (2^{2n+2p}-1)\zeta(1-2n-2p) = (2^{2n+2p}-1)\left(-\frac{B_{2n+2p}}{2n+2p}\right);$$

quindi: $a_h(2h)!$ =

$$=2^{2n}(-1)^{n-1}(-1)^{h}\sum_{j=0}^{2h}\binom{2h}{j}\sum_{u=0}^{2h-1}S(2h-1,u)\sum_{p\ge1}\binom{u}{2p-1}(j-1)^{u-2p+1}(2^{2n+2p}-1)\frac{B_{2n+2p}}{2n+2p};\quad (7c.3)$$

osserviamo che nello sviluppo della relazione precedente (7c.3), al variare di j, u, p, si presentano valori indeterminati (0^0). Per evitare detti inconvenienti calcoliamo l'espressione precedente per j = 0, per j = 1, e per j > 1.

Così operando, troviamo:

1) per j = 0, $\sum_{j=0}^{2h}\binom{2h}{j}k(-1)^{h}(k+j-1)(k+j-2)...(k+j-2h+1)=$

$$=(-1)^{h}k(k-1)(k-2)...(k-2h+1)=(-1)^{h}\sum_{u=0}^{2h}S(2h,u)k^{u};$$

$$[a_h(2h)!]_{j=0}=2^{2n}(-1)^{n}\sum_{k\ge1}(-1)^{k}k^{2n-1}\ (-1)^{h}\sum_{u=0}^{2h}S(2h,u)k^{u}=$$

$$=2^{2n}(-1)^{n}(-1)^{h}\sum_{u=0}^{2h}S(2h,u)\sum_{k\ge1}(-1)^{k}k^{2n+u-1}=$$

$$=2^{2n}(-1)^{n}(-1)^{h}\sum_{u=0}^{h}S(2h,2u)\sum_{k\ge1}(-1)^{k}k^{2n+2u-1}=$$

$$= 2^{2n}(-1)^n(-1)^h\sum_{u=0}^{h} S(2h,2u)(2^{2n+2u}-1)\zeta(1-2n-2u) =$$

$$= 2^{2n}(-1)^{n-1}(-1)^h\sum_{u=0}^{h} S(2h,2u)(2^{2n+2u}-1)\frac{B_{2n+2u}}{2n+2u}$$

2) per j = 1, $\sum_{j=0}^{2h}\binom{2h}{j}k(-1)^h(k+j-1)(k+j-2)...(k+j-2h+1) =$

$$= 2hk(-1)^h(k)(k-1)...(k-2h+2) = 2hk(-1)^h\sum_{u=0}^{2h-1} S(2h-1,u)k^u \,;$$

$$a_h(2h)!]_{j=1} = 2^{2n}(-1)^n\sum_{k\geq 1}(-1)^k k^{2n-1}\ 2hk(-1)^h\sum_{u=0}^{2h-1} S(2h-1,u)k^u =$$

$$= 2^{2n+1}(-1)^n h(-1)^h\sum_{u=0}^{2h-1} S(2h-1,u)\sum_{k\geq 1}(-1)^k k^{2n+u} =$$

$$= 2^{2n+1}(-1)^n h(-1)^h\sum_{u=1}^{h} S(2h-1,2u-1)\sum_{k\geq 1}(-1)^k k^{2n+2u-1}$$; pertanto:

$$a_h(2h)! = 2^{2n}(-1)^{n-1}(-1)^h\sum_{u=0}^{h} S(2h,2u)(2^{2n+2u}-1)\frac{B_{2n+2u}}{2n+2u} +$$

$$+ 2^{2n+1}(-1)^n h(-1)^h\sum_{u=1}^{h} S(2h-1,2u-1)\sum_{k\geq 1}(-1)^k k^{2n+2u-1} +$$

$$+ 2^{2n}(-1)^{n-1}(-1)^h\sum_{j=0}^{2h}\binom{2h}{j}\sum_{u=0}^{2h-1} S(2h-1,u)\sum_{p\geq 1}\binom{u}{2p-1}(j-1)^{u-2p+1}(2^{2n+2p}-1)\frac{B_{2n+2p}}{2n+2p}.$$

In definitiva, ricaviamo:

$$a_h = \frac{2^{2n}}{(2h)!}(-1)^{n-1}(-1)^h[\sum_{u=0}^{h} S(2h,2u)(2^{2n+2u}-1)\frac{B_{2n+2u}}{2n+2u} +$$

$$+ 2h\sum_{u=1}^{h} S(2h-1,2u-1)(2^{2n+2u}-1)\frac{B_{2n+2u}}{2n+2u} +$$

$$+ \sum_{j=2}^{2h}\binom{2h}{j}\sum_{u=0}^{2h-1} S(2h-1,u)\sum_{p=1}^{[(u+1)/2]}\binom{u}{2p-1}(j-1)^{u-2p+1}(2^{2n+2p}-1)\frac{B_{2n+2p}}{2n+2p}]. \qquad (7c.4)$$

Per h = 0, ritroviamo la formula: $a_0 = 2^{2n}(2^{2n}-1)\frac{|B_{2n}|}{2n}$

Per h = n, ricaviamo:

$$a_n = -\frac{2^{2n}}{(2n)!}[\sum_{u=0}^{n} S(2n,2u)(2^{2n+2u}-1)\frac{B_{2n+2u}}{2n+2u} +$$

$$+ 2n\sum_{u=1}^{n} S(2n-1,2u-1)(2^{2n+2u}-1)\frac{B_{2n+2u}}{2n+2u} +$$

$$+ \sum_{j=2}^{2n}\binom{2n}{j}\sum_{u=0}^{2n-1} S(2n-1,u)\sum_{p=1}^{[u/2]}\binom{u}{2p-1}(j-1)^{u-2p+1}(2^{2n+2p}-1)\frac{B_{2n+2p}}{2n+2p}] = \mathbf{(2n-1)!} \qquad (7c.5)$$

Le relazioni (7c.4) e (7c.5) sono state verificate con un programma di matematica.
La verifica della (7c.5) conferma quanto asserito nella soluzione del problema n. 2c, Punto 4.

Risoluzione del Problema n. 8c

Riprendiamo le formule indicate in (3c.1)

$$\pi[Tan(\pi x)]^{2n} = \pi^{2n+1}\sum_{h=0}^{n} b_h [Tan(\pi x)]^{2h+1} = \frac{2\pi}{i}\sum_{k\geq 1}(-1)^k(-2\pi i)^{2n}k^{2n}e^{-2\pi i x k}\ , \qquad (8c.1)$$

e poniamo $Tan(\pi x) = t$, da cui: $\pi x = ArcTan(t) = \frac{1}{2i}\ln\frac{1+it}{1-it}$,

che sostituita nella (8c.1) fornisce:

$$\pi^{2n+1}\sum_{h=0}^{n} b_h t^{2h+1} = \frac{(2\pi)^{2n+1}(-1)^n}{i}\sum_{k\geq 1}(-1)^k k^{2n} e^{-k\ln\frac{1+it}{1-it}} =$$

$$= \frac{(2\pi)^{2n+1}(-1)^n}{i}\sum_{k\geq 1}(-1)^k k^{2n}\left(\frac{1-it}{1+it}\right)^k ; \qquad (8c.2)$$

derivando la (8c.2), (2h+1) volte, rispetto a t, e ponendo dopo, t = 0, abbiamo:

$$\pi^{2n+1} b_h (2h+1)! = \left[\frac{(2\pi)^{2n+1}(-1)^n}{i}\sum_{k\geq 1}(-1)^k k^{2n}\left(\frac{1-it}{1+it}\right)^k\right]_{t=0}^{(2h+1)} ;$$

ora, $[(1-it)^k(1+it)^{-k}]_{t=0}^{(2h+1)} = \lim_{t\to 0}\sum_{j=0}^{2h+1}\binom{2h+1}{j}[(1-it)^k]^{(2h+1-j)}[(1+it)^{-k}]^{(j)} =$

$$= \sum_{j=0}^{2h+1}\binom{2h+1}{j}\frac{\Gamma(k+1)(-i)^{2h+1-j}}{\Gamma(k+1-2h-1+j)}\frac{\Gamma(k+j)(-i)^j}{\Gamma(k)} =$$

$$= \sum_{j=0}^{2h+1}\binom{2h+1}{j}(-1)^h(-i)k\frac{\Gamma(k+j)}{\Gamma(k+j-2h)} =$$

$$= \sum_{j=0}^{2h+1}\binom{2h+1}{j}(-1)^h(-i)k(k+j-1)(k+j-2)\ldots(k+j-2h) =$$

$$= \sum_{j=0}^{2h+1}\binom{2h+1}{j}(-1)^h(-i)k\sum_{u=0}^{2h}S(2h,u)(k+j-1)^u =$$

$$= \sum_{j=0}^{2h+1}\binom{2h+1}{j}(-1)^h(-i)k\sum_{u=0}^{2h}S(2h,u)\sum_{p=0}^{u}\binom{u}{p}k^p(j-1)^{u-p}\text{; pertanto:}$$

$b_h(2h+1)! =$

$$= \frac{2^{2n+1}(-1)^n}{i}\sum_{k\geq 1}(-1)^k k^{2n}\sum_{j=0}^{2h+1}\binom{2h+1}{j}(-1)^h(-i)k\sum_{u=0}^{2h}S(2h,u)\sum_{p=0}^{u}\binom{u}{p}k^p(j-1)^{u-p} =$$

$$= 2^{2n+1}(-1)^{n-1}(-1)^h\sum_{j=0}^{2h+1}\binom{2h+1}{j}\sum_{u=0}^{2h}S(2h,u)\sum_{p=0}^{u}\binom{u}{p}(j-1)^{u-p}\sum_{k\geq 1}(-1)^k k^{2n+p+1} =$$

$$= 2^{2n+1}(-1)^{n-1}(-1)^h\sum_{j=0}^{2h+1}\binom{2h+1}{j}\sum_{u=0}^{2h}S(2h,u)\sum_{p=0}^{[u/2]}\binom{u}{2p}(j-1)^{u-2p}\sum_{k\geq 1}(-1)^k k^{2n+2p+1} =$$

$$= 2^{2n+1}(-1)^{n+h}\sum_{j=0}^{2h+1}\binom{2h+1}{j}\sum_{u=0}^{2h}S(2h,u)\sum_{p=0}^{[u/2]}\binom{u}{2p}(j-1)^{u-2p}(2^{2n+2p+2}-1)\frac{B_{2n+2p+2}}{2n+2p+2}. \qquad (8c.3)$$

Anche qui, osserviamo che nello sviluppo della relazione precedente (8c.3),

al variare di j, u, p, si presentano valori indeterminati (0^0).
Per evitare detti inconvenienti calcoliamo l'espressione precedente per j = 0, per j = 1, e per j > 1. Così operando, troviamo:

1) per j = 0, $\sum_{j=0}^{2h+1}\binom{2h+1}{j}(-1)^h(-i)k(k+j-1)(k+j-2)...(k+j-2h)=$

$$= (-1)^h(-i)k(k-1)(k-2)...(k-2h) = (-1)^h(-i)\sum_{u=0}^{2h+1}S(2h+1,u)k^u$$

$$b_h(2h+1)!]_{j=0} = [\frac{2^{2n+1}(-1)^n}{i}\sum_{k\geq 1}(-1)^k k^{2n}\ \ (-1)^h(-i)\sum_{u=0}^{2h+1}S(2h+1,u)k^u =$$

$$= 2^{2n+1}(-1)^{n-1}(-1)^h\sum_{u=0}^{2h+1}S(2h+1,u)\sum_{k\geq 1}(-1)^k k^{2n+u} =$$

$$= 2^{2n+1}(-1)^{n-1}(-1)^h\sum_{u=0}^{h}S(2h+1,2u+1)\sum_{k\geq 1}(-1)^k k^{2n+2u+1} =$$

$$= 2^{2n+1}(-1)^n(-1)^h\sum_{u=0}^{h}S(2h+1,2u+1)(2^{2n+2u+2}-1)\frac{B_{2n+2u+2}}{2n+2u+2}$$

2) per j = 1, $\sum_{j=0}^{2h+1}\binom{2h+1}{j}(-1)^h(-i)k(k+j-1)(k+j-2)...(k+j-2h)=$

$$= (2h+1)(-1)^h(-i)k(k)(k-1)...(k+1-2h) = (2h+1)(-1)^h(-i)k\sum_{u=0}^{2h}S(2h,u)k^u =$$

$$b_h(2h+1)!]_{j=1} = \frac{2^{2n+1}(-1)^n}{i}\sum_{k\geq 1}(-1)^k k^{2n}\ \ (2h+1)(-1)^h(-i)k\sum_{u=0}^{2h}S(2h,u)k^u =$$

$$= 2^{2n+1}(-1)^{n-1}(2h+1)(-1)^h\sum_{u=0}^{2h}S(2h,u)\sum_{k\geq 1}(-1)^k k^{2n+1+u} =$$

$$= 2^{2n+1}(-1)^{n-1}(2h+1)(-1)^h\sum_{u=0}^{h}S(2h,2u)\sum_{k\geq 1}(-1)^k k^{2n+1+2u} =$$

$$= 2^{2n+1}(-1)^n(2h+1)(-1)^h\sum_{u=0}^{h}S(2h,2u)(2^{2n+2u+2}-1)\frac{B_{2n+2u+2}}{2n+2u+2};$$

Pertanto, ricaviamo:

$$b_h(2h+1)! = 2^{2n+1}(-1)^n(-1)^h[\sum_{u=0}^{h}S(2h+1,2u+1)(2^{2n+2u+2}-1)\frac{B_{2n+2u+2}}{2n+2u+2}+$$

$$+2^{2n+1}(-1)^n(2h+1)(-1)^h\sum_{u=0}^{h}S(2h,2u)(2^{2n+2u+2}-1)\frac{B_{2n+2u+2}}{2n+2u+2}+$$

$$+2^{2n+1}(-1)^{n+h}\sum_{j=2}^{2h+1}\binom{2h+1}{j}\sum_{u=0}^{2h}S(2h,u)\sum_{p=0}^{[u/2]}\binom{u}{2p}(j-1)^{u-2p}(2^{2n+2p+2}-1)\frac{B_{2n+2p+2}}{2n+2p+2},$$

da cui: $b_h = \frac{2^{2n+1}}{(2h+1)!}(-1)^n(-1)^h[\sum_{u=0}^{h} S(2h+1,2u+1)(2^{2n+2u+2}-1)\frac{B_{2n+2u+2}}{2n+2u+2}+$

$$+(2h+1)\sum_{u=0}^{h} S(2h,2u)(2^{2n+2u+2}-1)\frac{B_{2n+2u+2}}{2n+2u+2}+$$

$$+\sum_{j=2}^{2h+1}\binom{2h+1}{j}\sum_{u=0}^{2h} S(2h,u)\sum_{p=0}^{[u/2]}\binom{u}{2p}(j-1)^{u-2p}(2^{2n+2p+2}-1)\frac{B_{2n+2p+2}}{2n+2p+2}] \qquad (8c.4)$$

Per h = 0, ritroviamo la formula: $b_0 = \frac{1}{n+1}(2^{2n+2}-1)2^{2n+1}|B_{2n+2}|$

Per h = n, ricaviamo:

$$b_n = \frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!}[\sum_{u=0}^{n} S(2n+1,2u+1)(2^{2n+2u+2}-1)\frac{B_{2n+2u+2}}{2n+2u+2}+$$

$$+(2n+1)\sum_{u=0}^{n} S(2n,2u)(2^{2n+2u+2}-1)\frac{B_{2n+2u+2}}{2n+2u+2}$$

$$+\sum_{j=2}^{2n+1}\binom{2n+1}{j}\sum_{u=0}^{2n} S(2n,u)\sum_{p=0}^{[u/2]}\binom{u}{2p}(j-1)^{u-2p}(2^{2n+2p+2}-1)\frac{B_{2n+2p+2}}{2n+2p+2}] = \mathbf{(2n)!} \qquad (8c.5)$$

Le relazioni (8c.4) e (8c.5) sono state verificate con un programma di matematica.
La verifica della (8c.5) conferma quanto asserito nella soluzione del problema n. 3c, Punto 3.

Risoluzione del Problema n. 1p

Punto 1)-Utilizzando la seguente relazione dei complementi:

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{Sin(\pi z)}, \qquad 0 < z < 1$$

e ponendo, $z = \frac{1}{2} - x$, otteniamo:

$$\Gamma(x+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2}-x) = \frac{\pi}{Cos(\pi x)}, \qquad |x| < \frac{1}{2} \qquad (1p.1)$$

essendo, $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-z}$, la ben nota funzione di Eulero di seconda specie.

$$\Gamma(x+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2}-x) = \int_0^1 t^{x-1+1/2}(1-t)^{-x-1+1/2}dt = \int_0^\infty t^{x-1+1/2}\frac{dt}{1+t} = (t = e^u) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{u(x-1+1/2)}\frac{e^u du}{1+e^u} = \int_0^\infty e^{u(x-1+1/2)}\frac{e^u du}{1+e^u} + \int_0^\infty e^{-u(x-1+1/2)}\frac{e^{-u}du}{1+e^{-u}} =$$

$$\int_0^\infty e^{u(x+1/2)}\frac{du}{1+e^u}+\int_0^\infty e^{-u(x+1/2)}\frac{du}{1+e^{-u}}=$$

$$=\int_0^\infty e^{ux}\frac{du}{e^{u/2}+e^{-u/2}}+\int_0^\infty e^{-ux}\frac{du}{e^{u/2}+e^{-u/2}}=$$

$$=\int_0^\infty \frac{Cosh(ux)}{Cosh(u/2)}du=\frac{\pi}{Cos(\pi x)},\qquad |x|<\frac{1}{2} \tag{1p.2}$$

Risoluzione del Problema n. 2p

Utilizzando la relazione:

$$\int_0^\infty \frac{Cosh(ux)}{Cosh(u/2)}du=\frac{\pi}{Cos(\pi x)},\qquad |x|<\frac{1}{2},$$

e derivando, (2n-1) volte, rispetto ad x, (n = 1,2,3,…), e ponendo dopo, x = 0, otteniamo:

$$\lim_{x\to 0}\int_0^\infty \frac{u^{2n-1}Sinh(ux)}{Cosh(u/2)}du\;=0;$$

$$[\frac{\pi}{Cos(\pi x)}]^{(2n-1)}_{x=0}\;=\;2\pi[\sum_{k\geq 0}(-)^k e^{-i\pi x(1+2k)}]^{(2n-1)}_{x=0}=2\pi\sum_{k\geq 0}(-)^k(-i\pi)^{2n-1}(1+2k)^{2n-1}=0,$$

da cui: $\sum_{k\geq 0}(-1)^k(1+2k)^{2n-1}\;=1+\;\sum_{k\geq 1}(-1)^k(1+2k)^{2n-1}\;=1+\;\sum_{k\geq 1}(-1)^k\sum_{h=0}^{2n-1}\binom{2n-1}{h}(2k)^h=$

$$=1+\sum_{k\geq 1}(-1)^k+\sum_{k\geq 1}(-1)^k\sum_{h=1}^{2n-1}\binom{2n-1}{h}(2k)^h\;=1-\frac{1}{2}+\sum_{h=1}^{2n-1}\binom{2n-1}{h}2^h\sum_{k\geq 1}(-1)^k k^h=$$

$$=\frac{1}{2}+\sum_{h=1}^{n}\binom{2n-1}{2h-1}2^{2h-1}\sum_{k\geq 1}(-1)^k k^{2h-1}=\;\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sum_{h=1}^{n}\binom{2n-1}{2h-1}2^{2h}(2^{2h}-1)\frac{B_{2h}}{2h}\;=0,\text{ da cui:}$$

$$\frac{1}{2n}\sum_{h=1}^{n}\binom{2n}{2h}2^{2h}(2^{2h}-1)B_{2h}\;=1 \tag{2p.3}$$

Nel procedimento per ricavare la (2p.3) abbiamo utilizzato le seguenti formule:

$$\sum_{k\geq 1}(-1)^k\;=-\frac{1}{2},\sum_{k\geq 1}(-1)^k k^{2h-1}=(2^{2h}-1)(-\frac{B_{2h}}{2h}),\zeta(1-2h)=-\frac{B_{2h}}{2h},\zeta(-2h)=0,$$

$$.\binom{2n-1}{2h-1}\frac{1}{2h}=\frac{1}{2n}\binom{2n}{2h}$$

La relazione (2p.3) è stata verificata con programma di matematica.

Punto 2) – Dalla relazione

$$\lim_{x \to 1/4} \int_0^\infty \frac{u^{2n-1} Sinh(ux)}{Cosh(u/2)} du \ = [\frac{\pi}{Cos(\pi x)}]^{(2n-1)}_{x=1/4} = 2\pi [\sum_{k\geq 0} (-1)^k e^{-i\pi x(1+2k)}]^{(2n-1)}_{x=1/4)} ,$$

troviamo: $\int_0^\infty \frac{u^{2n-1} Sinh(u/4)}{Cosh(u/2)} du \ = \int_0^\infty u^{2n-1}(e^{u/4} - e^{-u/4}) e^{-u/2} \sum_{k\geq 0} (-1)^k e^{-uk} du =$

$$\int_0^\infty u^{2n-1} \sum_{k\geq 0} (-1)^k (e^{-u/4} - e^{-3u/4}) e^{-uk} du = (2n-1)! \sum_{k\geq 0} (-1)^k [\frac{1}{(\frac{1}{4}+k)^{2n}} - \frac{1}{(\frac{3}{4}+k)^{2n}}] =$$

$$= (2n-1)! 4^{2n} \sum_{k\geq 0} (-1)^k [\frac{1}{(1+4k)^{2n}} - \frac{1}{(3+4k)^{2n}}];$$

$$2\pi [\sum_{k\geq 0} (-1)^k e^{-i\pi x(1+2k)}]^{(2n-1)}_{x=1/4)} = 2\pi \sum_{k\geq 0} (-1)^k (-i\pi)^{2n-1} (1+2k)^{2n-1} e^{-i\pi/4} (-i)^k =$$

$$= 2\pi^{2n} \frac{(-1)^n}{-i} e^{-i\pi/4} \sum_{k\geq 0} (i)^k (1+2k)^{2n-1} \ ;$$

$$\sum_{k\geq 0} (i)^k (1+2k)^{2n-1} = \sum_{k\geq 0} (-1)^k (1+4k)^{2n-1} + \sum_{k\geq 1} (i)^{2k-1} (4k-1)^{2n-1} =$$

$= \sum_{k\geq 0} (-1)^k (1+4k)^{2n-1} + i \sum_{k\geq 1} (-1)^k (1-4k)^{2n-1}$; quindi:

$$2\pi^{2n} \frac{(-1)^n}{-i} e^{-i\pi/4} \sum_{k\geq 0} (i)^k (1+2k)^{2n-1} = \pi^{2n} (-1)^n \sqrt{2} (1+i) \sum_{k\geq 0} (i)^k (1+2k)^{2n-1} =$$

$$= \pi^{2n} (-1)^n \sqrt{2} (1+i) \ [\sum_{k\geq 0} (-1)^k (1+4k)^{2n-1} + i \sum_{k\geq 1} (-1)^k (1-4k)^{2n-1} \ ]$$

Prendendo la parte reale della precedente, abbiamo:

$$= \pi^{2n} (-1)^n \sqrt{2} \ [\sum_{k\geq 0} (-1)^k (1+4k)^{2n-1} - \sum_{k\geq 1} (-1)^k (1-4k)^{2n-1} \ ] =$$

$$= \pi^{2n} (-1)^n \sqrt{2} \ [1 + \sum_{k\geq 1} (-1)^k \sum_{h=0}^{2n-1} \binom{2n-1}{h} (4k)^h - \sum_{k\geq 1} (-1)^k \sum_{h=0}^{2n-1} \binom{2n-1}{h} (-4k)^h \ ] =$$

$$= \pi^{2n} (-1)^n \sqrt{2} \ [1 + \sum_{k\geq 1} (-1)^k \sum_{h=1}^{n} \binom{2n-1}{2h-1} (4k)^{2h-1} - \sum_{k\geq 1} (-1)^k \sum_{h=1}^{n} \binom{2n-1}{2h-1} (-4k)^{2h-1} \ ] =$$

$$= \pi^{2n} (-1)^n \sqrt{2} [1 + \frac{1}{2} \sum_{h=1}^{n} \binom{2n-1}{2h-1} 4^{2h} \sum_{k\geq 1} (-1)^k k^{2h-1}] =$$

$$=\pi^{2n}(-1)^n\sqrt{2}[1+\frac{1}{2}\sum_{h=1}^{n}\binom{2n-1}{2h-1}4^{2h}(2^{2h}-1)(-\frac{B_{2h}}{2h})]=$$

$$=\pi^{2n}(-1)^{n-1}\sqrt{2}[\frac{1}{4n}\sum_{h=1}^{n}\binom{2n}{2h}4^{2h}(2^{2h}-1)B_{2h}-1]; \text{ pertanto:}$$

$$(2n-1)!4^{2n}\sum_{k\geq 0}(-1)^k[\frac{1}{(1+4k)^{2n}}-\frac{1}{(3+4k)^{2n}}]=$$

$$=\pi^{2n}(-1)^{n-1}\sqrt{2}[\frac{1}{4n}\sum_{h=1}^{n}\binom{2n}{2h}4^{2h}(2^{2h}-1)B_{2h}-1], \text{ da cui:}$$

$$\sum_{k\geq 0}(-1)^k[\frac{1}{(1+4k)^{2n}}-\frac{1}{(3+4k)^{2n}}]=$$

$$=\pi^{2n}(-1)^{n-1}\sqrt{2}\,\frac{4^{-2n}}{2(2n)!}[\sum_{h=1}^{n}\binom{2n}{2h}4^{2h}(2^{2h}-1)B_{2h}-4n]. \qquad (2p.4)$$

La relazione (2p.4) è stata verificata con programma di matematica.

Risoluzione del Problema n. 3p

Punto 1)-Utilizzando la relazione:

$$\int_0^\infty \frac{Cosh(ux)}{Cosh(u/2)}du=\frac{\pi}{Cos(\pi x)}, \qquad |x|<\frac{1}{2},$$

e derivando, (2n) volte, rispetto ad x, (n = 1,2,3,…), e ponendo dopo, x = 0, otteniamo:

$$\int_0^\infty \frac{u^{2n}}{Cosh(u/2)}du=[\frac{\pi}{Cos(\pi x)}]_{x=0}^{(2n)}=2\pi[\sum_{k\geq 0}(-1)^k e^{-i\pi x(1+2k)}]_{x=0}^{(2n)};$$

$$\int_0^\infty \frac{u^{2n}}{Cosh(u/2)}du=\int_0^\infty 2u^{2n}e^{-u/2}\sum_{k\geq 0}(-1)^k e^{-uk}du=2\sum_{k\geq 0}(-1)^k\frac{(2n)!}{(\frac{1}{2}+k)^{2n+1}}=$$

$$=2^{2n+2}(2n)!\sum_{k\geq 0}\frac{(-1)^k}{(1+2k)^{2n+1}};$$

$$2\pi[\sum_{k\geq 0}(-1)^k e^{-i\pi x(1+2k)}]_{x=0}^{(2n)}=2\pi\sum_{k\geq 0}(-1)^k(-i\pi)^{2n}(1+2k)^{2n}=2\pi^{2n+1}(-1)^n\sum_{k\geq 0}(-1)^k(1+2k)^{2n}=$$

Ricordiamo che:

$$=\sum_{k\ge0}(-1)^k(1+2k)^{2n}=1+\sum_{k\ge1}(-1)^k\sum_{h=0}^{2n}\binom{2n}{h}(2k)^h=1+\sum_{k\ge1}(-1)^k+\sum_{h=1}^{2n}\binom{2n}{h}2^h\sum_{k\ge1}(-1)^k k^h=$$

$$=\frac{1}{2}+\sum_{h=1}^{n}\binom{2n}{2h-1}2^{2h-1}\sum_{k\ge1}(-1)^k k^{2h-1}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2(2n+1)}\sum_{h=1}^{n}\binom{2n+1}{2h}2^{2h}(2^{2h}-1)B_{2h}$$

$$2^{2n+2}(2n)!\sum_{k\ge0}\frac{(-1)^k}{(1+2k)^{2n+1}}=2\pi^{2n+1}(-1)^n\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{2(2n+1)}\sum_{h\ge1}\binom{2n+1}{2h}2^{2h}(2^{2h}-1)B_{2h}\right]=$$

$$=\pi^{2n+1}(-1)^{n-1}\left[\frac{1}{(2n+1)}\sum_{h\ge1}\binom{2n+1}{2h}2^{2h}(2^{2h}-1)B_{2h}-1\right]\text{,da cui:}$$

$$\sum_{k\ge0}\frac{(-1)^k}{(1+2k)^{2n+1}}=\frac{\pi^{2n+1}(-1)^{n-1}}{2^{2n+2}(2n+1)!}\left[\sum_{h=1}^{n}\binom{2n+1}{2h}2^{2h}(2^{2h}-1)B_{2h}-(2n+1)\right]\qquad(3p.1)$$

La formula (3p.1) è stata verificata con un programma di matematica.

Punto 2)- Utilizzando la relazione:

$$\int_0^\infty\frac{Cosh(ux)}{Cosh(u/2)}du=\frac{\pi}{Cos(\pi x)},\qquad |x|<\frac{1}{2},$$

e derivando, (2n) volte, rispetto ad x, (n = 1,2,3,…), e ponendo dopo, x = 1/4, otteniamo:

$$\int_0^\infty\frac{u^{2n}Cosh(u/4)}{Cosh(u/2)}du=\left[\frac{\pi}{Cos(\pi x)}\right]^{(2n)}_{x=1/4}=2\pi\left[\sum_{k\ge0}(-1)^k e^{-i\pi x(1+2k)}\right]^{(2n)}_{x=1/4};$$

$$\int_0^\infty\frac{u^{2n}Cosh(u/4)}{Cosh(u/2)}du=\int_0^\infty u^{2n}(e^{u/4}+e^{-u/4})e^{-u/2}\sum_{k\ge0}(-1)^k e^{-uk}du=$$

$$=\sum_{k\ge0}(-1)^k\int_0^\infty u^{2n}(e^{u/4}+e^{-u/4})e^{-u/2}e^{-uk}du=\sum_{k\ge0}(-1)^k\int_0^\infty u^{2n}(e^{-u/4}+e^{-3u/4})e^{-uk}du=$$

$$=(2n)!\sum_{k\ge0}(-1)^k\left[\frac{1}{(\frac{1}{4}+k)^{2n+1}}+\frac{1}{(\frac{3}{4}+k)^{2n+1}}\right]=(2n)!4^{2n+1}\sum_{k\ge0}(-1)^k\left[\frac{1}{(1+4k)^{2n+1}}+\frac{1}{(3+4k)^{2n+1}}\right];$$

$$2\pi\left[\sum_{k\ge0}(-1)^k e^{-i\pi x(1+2k)}\right]^{(2n)}_{x=1/4}=2\pi\sum_{k\ge0}(-1)^k(-i\pi)^{2n}(1+2k)^{2n}e^{-i\pi/4}(-i)^k=$$

$$=2\pi^{2n+1}(-1)^n e^{-i\pi/4}\sum_{k\ge0}(i)^k(1+2k)^{2n}\;;$$

ora, $e^{-i\pi/4}\sum_{k\ge0}(i)^k(1+2k)^{2n}=\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\left[1+\sum_{k\ge1}(-1)^k(1+4k)^{2n}-i\sum_{k\ge1}(-1)^k(4k-1)^{2n}\right];$

prendendo le parti reali della relazione precedente, abbiamo:

$$\mathrm{Re}[e^{-i\pi/4}\sum_{k\geq 0}(i)^k(1+2k)^{2n}]=\frac{\sqrt{2}}{2}[1+\sum_{k\geq 1}(-1)^k(1+4k)^{2n}-\sum_{k\geq 1}(-1)^k(1-4k)^{2n}]=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}[1+\sum_{k\geq 1}(-1)^k\sum_{h=0}^{2n}\binom{2n}{h}(4k)^h-\sum_{k\geq 1}(-1)^k\sum_{h=0}^{2n}\binom{2n}{h}(-4k)^h]=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}[1+\sum_{k\geq 1}(-1)^k\sum_{h=1}^{n}\binom{2n}{2h-1}(4k)^{2h-1}-\sum_{k\geq 1}(-1)^k\sum_{h=0}^{n}\binom{2n}{2h-1}(-4k)^{2h-1}]=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}[1+2\sum_{h=1}^{n}\binom{2n}{2h-1}4^{2h-1}\sum_{k\geq 1}(-1)^k k^{2h-1}]=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}[1-2\sum_{h=1}^{n}\binom{2n}{2h-1}4^{2h-1}(2^{2h}-1)\frac{B_{2h}}{2h}]=\frac{\sqrt{2}}{2}[1-\frac{1}{2(2n+1)}\sum_{h=1}^{n}\binom{2n+1}{2h}4^{2h}(2^{2h}-1)B_{2h}];$$

$$(2n)!4^{2n+1}\sum_{k\geq 0}(-1)^k[\frac{1}{(1+4k)^{2n+1}}+\frac{1}{(3+4k)^{2n+1}}]=2\pi^{2n+1}(-1)^n e^{-i\pi/4}\sum_{k\geq 0}(i)^k(1+2k)^{2n}=$$

$$=\pi^{2n+1}(-1)^{n-1}\sqrt{2}[\frac{1}{2(2n+1)}\sum_{h=1}^{n}\binom{2n+1}{2h}4^{2h}(2^{2h}-1)B_{2h}-1]\text{, da cui:}$$

$$\sum_{k\geq 0}(-1)^k[\frac{1}{(1+4k)^{2n+1}}+\frac{1}{(3+4k)^{2n+1}}]=$$

$$=\frac{(-1)^{n-1}\pi^{2n+1}\sqrt{2}}{4^{2n+1}2(2n+1)!}[\sum_{h=1}^{n}\binom{2n+1}{2h}4^{2h}(2^{2h}-1)B_{2h}-2(2n+1)] \qquad (3p.2)$$

La relazione (3p.2) è stata verificata con un programma di matematica.

Risoluzione del problema n. 4p

Utilizzando la relazione

$$\int_0^\infty\frac{t^{z-1}dt}{1+t}=\frac{\pi}{Sin\pi z}\text{, } 0 < z < 1,$$

e ponendo z = 1/n, con n > 1, otteniamo:

$$\int_0^\infty\frac{t^{\frac{1}{n}-1}dt}{1+t}=\frac{\pi}{Sin\frac{\pi}{n}}=(t=u^n)=\int_0^\infty\frac{u^{n(\frac{1}{n}-1)}nu^{n-1}du}{1+u^n}=n\int_0^\infty\frac{du}{1+u^n}=$$

$$= n[\int_0^1 \frac{du}{1+u^n} + \int_0^1 \frac{u^{n-2}du}{1+u^n}] = n\int_0^1 \frac{1+u^{n-2}du}{1+u^n}$$

Ora, $\dfrac{n(1+u^{n-2})}{1+u^n} = n\sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{1+u_k^{n-2}}{u-u_k}\dfrac{1}{nu_k^{n-1}} = \sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{1+u_k^{n-2}}{u-u_k}\dfrac{u_k}{u_k^n}$,

dove $u_k^n = -1$, $u_k = e^{i\pi(2k+1)/n}$, k = 0,1,2,3,…(n-1); quindi:

$\dfrac{n(1+u^{n-2})}{1+u^n} = -\sum_{k=0}^{n-1}(u_k - \dfrac{1}{u_k})\dfrac{1}{u-u_k}$; pertanto:

$$\int_0^\infty \frac{t^{\frac{1}{n}-1}dt}{1+t} = \frac{\pi}{Sin\frac{\pi}{n}} = -\sum_{k=0}^{n-1}(u_k - \frac{1}{u_k})[\ln(u-u_k]_0^1 = -\sum_{k=0}^{n-1}(u_k - \frac{1}{u_k})[\ln(1-\frac{1}{u_k}) =$$

$$= -\sum_{k=0}^{n-1}(e^{i\pi(2k+1)/n} - e^{-i\pi(2k+1)/n})\ln(1-e^{-i\pi(2k+1)/n});$$

$$\ln[1-e^{-i\pi(2k+1)/n}] = \ln\{1-Cos[\pi(2k+1)/n] + iSin[\pi(2n+1)/n]\} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\{(1-Cos[\pi(2k+1)/n])^2 + (Sin[\pi(2n+1)/n])^2\} + iArcTan\frac{Sin[\pi(2k+1)/n]}{1-Cos[\pi(2k+1)/n]};$$

$$iArcTan\frac{Sin[\pi(2k+1)/n]}{1-Cos[\pi(2k+1)/n]} = iArcTan\frac{Cos[\pi(2k+1)/(2n)]}{Sin[\pi(2k+1)/(2n)]} =$$

$= iArcTan\dfrac{Sin\{(\pi/2)[1-(2k+1)/n]\}}{Cos\{(\pi/2)[1-(2k+1)/n]\}} = i\dfrac{\pi}{2}(1-\dfrac{2k+1}{n})$; quindi:

$$\int_0^\infty \frac{t^{\frac{1}{n}-1}dt}{1+t} = \frac{\pi}{Sin\frac{\pi}{n}} = -\sum_{k=0}^{n-1}(e^{i\pi(2k+1)/n} - e^{-i\pi(2k+1)/n})\ln(1-e^{-i\pi(2k+1)/n}),$$

da cui, uguagliando le parti reali, ricaviamo:

$\dfrac{\pi}{Sin\frac{\pi}{n}} = \sum_{k=0}^{n-1} 2Sin[\pi(2k+1)/n]\{\dfrac{\pi}{2}(1-\dfrac{2k+1}{n})\}$, quindi:

$\dfrac{1}{Sin\frac{\pi}{n}} = \sum_{k=0}^{n-1}(\dfrac{n-2k-1}{n})Sin[\pi(2k+1)/n]$, cioè:

$$\sum_{k=0}^{n-1}(n-2k-1)Sin[\pi(2k+1)/n]Sin\frac{\pi}{n} = n$$

Ricordando che : Cos(a+b) - Cos(a-b) = -2SinaSinb, otteniamo:

$$\sum_{k=0}^{n-1}(n-2k-1)(-\frac{1}{2})[Cos\frac{2\pi(k+1)}{n} - Cos\frac{2\pi k}{n}] = n;$$

sostituendo, nella precedente relazione, k a k+1, troviamo:

$$\sum_{k=1}^{n}(n-2k+1)[Cos\frac{2\pi(k-1)}{n} - Cos\frac{2\pi k}{n}] = 2n; \qquad (4p.1)$$

Inoltre, osserviamo che:

$\sum_{k=1}^{n}[Cos\frac{2\pi(k-1)}{n}-Cos\frac{2\pi k}{n}]=0$, e quindi dalla (4p.1), ricaviamo:

$\sum_{k=1}^{n}(-2k)[Cos\frac{2\pi(k-1)}{n}-Cos\frac{2\pi k}{n}]=2n$, cioè:

$$\sum_{k=1}^{n}k[Cos\frac{2\pi k}{n}-Cos\frac{2\pi(k-1)}{n}]=n \qquad (4p.2)$$

La relazione (4p.2) è stata verificata con un programma di matematica.

Fiuggi, Agosto 2010

Dott. Ing. Pasquale Cutolo