

V A R I A N T E $4n+5$ D E L L A E X
C O N G E T T U R A D I C O L L A T Z ($3n+1$)

Sul numero 22-2006 della rivista web “METODO” abbiamo pubblicato, tra l’altro, la nostra dimostrazione della congettura di Collatz (detta anche di Ulam, o problema del $3n+1$, ecc.) che resisteva da circa cinquant’anni ai tentativi dei matematici.

Questa nostra dimostrazione, in breve, dice che, per qualsiasi valore di n , l’algoritmo (o ciclo, o “volo” numerico”) termina sempre, e precisamente quando esso si imbatte in un “numero di Collatz” e subito dopo in una potenza pari di 2, che lo fa “collassare”, se così si può dire, verso la sequenza finale 4, 2, 1, poiché solo le potenze di 2, se divise successivamente per 2, danno come numero dispari finale 1, che fa terminare il ciclo. Altri numeri pari invece, se divisi una o più volte per 2, finiscono con un numero dispari diverso da 1, e il ciclo ricomincia daccapo con

tale numero dispari così ottenuto, secondo la nota regola dell'algoritmo. Le potenze dispari di 2 non figurano nella dimostrazione poiché esse, pur essendo anch'esse divisibili per 2 fino al numero finale 1, non sono divisibili per 3 se ad esse si sottrae 1 (nel processo a ritroso), per es. $8^3 - 1$ non è divisibile per 3, e quindi nessun numero n moltiplicato per 3 con aggiunta di 1 può dare una potenza dispari di 2; al contrario delle potenze pari, per esempio $16 = 2^4$, poiché $2^4 - 1 = 15$ divisibile per 3 ottenendo $n = 5$, tale che, secondo l'algoritmo, $3*5 + 1 = 16$.

E poiché le potenze pari (e anche dispari) di 2 sono infinite e così pure i relativi numeri di Collatz che le precedono nell'algoritmo, esso termina sempre quale che sia n.

I numeri di Collatz, ricordiamo, sono di forma $c_i = (2^k - 1)/3$, oppure ricavabili dal precedente con la formula:

$$c_i = 4 * c_{i-1} + 1$$

I primi numeri di Collatz sono 1, 5, 21, 85, 341...

Quando il ciclo per qualsiasi n incontra uno di questi numeri, e quindi subito dopo una potenza pari di 2, esso collassa e termina immediatamente con la sequenza 4, 2, 1.

Ora, poiché esso funziona con le potenze pari di 2, vorremmo sapere se qualche altro algoritmo, variante del primo, potrebbe funzionare con le potenze di 3.

Dopo qualche tentativo, abbiamo scelto l'algoritmo $4n + 5$, ma dividendo per 3 i numeri ottenuti da $4n + 5$, anziché per 2 come nell'algoritmo $3n + 1$, ovviamente qualora $4n + 5$ sia divisibile per 3, altrimenti si ricomincia. Ora il ciclo ovviamente termina sempre con la sequenza finale 9, 3, 1 anziché con 4, 2, 1 come prima.

Ora $4n + 5$ deve essere multiplo di 3 e non multiplo di 2 (e cioè pari), come nella congettura classica, per poter effettuare la divisione, in caso contrario si procede ancora con $4n + 5$.

Ora i nuovi numeri di Collatz per questa variante della congettura (anzi ormai ex- congettura e quindi teorema a tutti gli effetti) sono di forma:

$$c_i = (3^k - 5) / 3, \text{ oppure ricavabile dal precedente}$$

con la formula:

$$c_i = 9 (c_{i-1} + 1) + 1$$

come vedremo nella seguente tabella:

potenze pari di 3

Numeri di Collatz

Ci

3^k con k pari.

$3^2 =$	9	1	C1
$3^4 =$	81	19	C2
$3^6 =$	729	181	C3
$3^8 =$	6.561	1.639	C4
$3^{10} =$	59.049	14.761	C5
$3^{12} =$	531.441	132.859	C6
$3^{14} =$	4.782.969	1.195.741	C7
...

Esempi di ciclo della variante $4n + 5$:

per $n = 1$: $4*1 + 5 = 4 + 5 = \underline{9} = 3^2$ potenza pari di 3

$$\underline{9}/3 = \underline{3}$$

$$3/3 = \underline{1} \text{ fine del ciclo.}$$

Per $n = 2$: $4*2. + 5 = 8 + 5 = 13$

$4*13 + 5 = 52 + 5 = 57$ divisibile per 3

$57/3 = \underline{19}$ numero di Collatz

$$4*19 + 5 = 76 + 5 = 81 = 3^4 \text{ potenza pari di } 3$$

$$81/3 = \underline{27}$$

$$27/3 = \underline{9}$$

$$9/3 = \underline{3}$$

$$3/3 = \underline{1} \text{ fine del ciclo.}$$

Per n più grandi i cicli sono più lunghi, e solo per n = 44 si incontra il terzo numero di Collatz = 181, e poi subito $3^6 = 729$ che fa collassare il ciclo:

$$4*44 + 5 = 176 + 5 = 181;$$

$$4*181 + 5 = 724 + 5 = 729 = 3^6 \text{ potenza pari di } 3.$$

Per il quarto numero di Collatz 1.639 non c'è un numero n intero di partenza, ma semintero: $(1.639 - 5)/4 = 408,5$;

ciò suggerisce che l'algoritmo variante $4n + 5$ è valido anche non solo per gli interi ma anche per i seminteri, così come anche il numero di Collatz 19 vale sia per n = 2, sia anche per n = 3,5 poiché $4*3.5 + 5 = 14 + 5 = 19$ numero di Collatz.

Si invitano i matematici molto curiosi (studenti e /o docenti) a verificare l'algoritmo con n interi e seminteri da 1 a 10, e/o con

altre possibili varianti diverse da $4n + 5$, per scoprire eventuali altre relazioni. Chi ne trovasse qualcuna molto interessante, è pregato di segnalarcela, sarà pubblicata in futuri articoli su questo argomento di matematica pura. L'ex congettura di Collatz (ora teorema, perché dimostrata) non aveva, e non ne ha neanche ora che è dimostrata, alcuna utilità pratica. Ma in seguito se ne potrebbe anche trovarne qualcuna, visto che vi sono coinvolte le potenze di 2, collegate al calcolo combinatorio (2^k sono le disposizioni di 2 elementi con ripetizione, nonché la somma delle combinazioni di k elementi a due a due, vedi Triangolo di Tartaglia). Una relazione tra Collatz e Tartaglia sarebbe quindi possibile, almeno in teoria; e una futura scoperta in tal senso sarebbe un buon risultato nella Teoria dei numeri.

Gruppo ERATOSTENE