

**Sul valore del limite di alcune particolari funzioni**

( On the value of the limit of some particular functions)  
 di Pasquale Cutolo

**SOMMARIO-** In questo studio proviamo a definire il valore del limite di alcune particolari funzioni, utilizzando ripetutamente il primo ed il secondo teorema integrale di Cauchy.

**ABSTRACT-** In this paper we try to define the value of the limit of some particular functions, using repeatedly the First and the Second Integral Theorem of Cauchy

1.0 - Consideriamo l'integrale  $\int_c e^{iz} dz$ , ed applichiamo il 1° teorema integrale di Cauchy lungo una curva chiusa  $c$ , costituita da una semicirconferenza, di raggio  $R$ , posta nel semipiano  $y \geq 0$ , ed avente il centro coincidente con l'origine degli assi cartesiani, dal tratto rettilineo  $(-R,R)$ , nonché dalla semicirconferenza di raggio  $\epsilon$ , ( Fig.1).

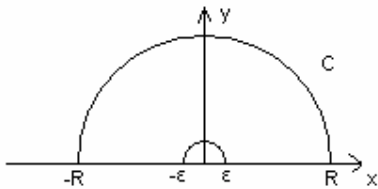


Fig.1

Abbiamo, quindi:

$$\int_{-R}^R e^{ix} dx + \int_0^\pi e^{iR e^{i\varphi}} \operatorname{Re}^{i\varphi} i d\varphi + \int_\pi^0 e^{i\epsilon e^{i\varphi}} \epsilon e^{i\varphi} i d\varphi = 0, \quad i = \sqrt{-1} \tag{1}$$

Il 3° integrale del 1° membro della (1), per  $\epsilon \rightarrow 0$ , chiaramente tende a zero; il 2° integrale del 1° membro della (1) è dato da:

$$\int_0^\pi e^{iR e^{i\varphi}} \operatorname{Re}^{i\varphi} i d\varphi = \int_0^\pi e^{iR(\operatorname{Cos}\varphi + i\operatorname{Sin}\varphi)} \operatorname{Re}^{i\varphi} i d\varphi = \int_0^\pi e^{iR \operatorname{cos}\varphi - R \operatorname{sin}\varphi} \operatorname{Re}^{i\varphi} i d\varphi \tag{2}$$

Per  $0 \leq \varphi \leq \pi, \operatorname{Sin}\varphi \geq 0$ , e quindi, per  $R \rightarrow \infty$ , l'ultimo integrale della (2) tende a zero.

Pertanto:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R e^{iz} dz = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iz} dz = \int_0^\infty 2 \operatorname{Cos}z dz = 0, \text{ cioè:} \tag{3}$$

$$\int_0^\infty \operatorname{Cos}z dz = 0$$

1.1 - Ora applichiamo il 1° teorema integrale di Cauchy allo stesso integrale

$\int_c e^{iz} dz$  lungo una curva chiusa  $c$ , costituita da un arco di circonferenza, di raggio  $R$ , posto nel 1° quadrante, e dai due lati del settore circolare, (Fig.2).

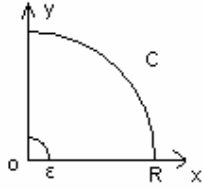


Fig. 2

Abbiamo, quindi:

$$\int_0^R e^{ix} dx + \int_0^{\pi/2} e^{iRe^{i\varphi}} Re^{i\varphi} i d\varphi + \int_R^0 e^{-t} dt = 0 \quad (4)$$

Il valore dell'integrale lungo l'arco della circonferenza di raggio  $\varepsilon$ , per  $\varepsilon \rightarrow 0$ , tende a zero.

Per  $R \rightarrow \infty$ , il 2° integrale del 1° membro della (4) tende a zero, mentre il 3° integrale del 1° membro della (4) è uguale a  $(-i)$ ; quindi, dalla (4) ricaviamo:

$$\int_0^\infty e^{ix} dx = \int_0^\infty \text{Cos} x dx + i \int_0^\infty \text{Sin} x dx = i \quad (5)$$

Uguagliando le parti reali e quelle immaginarie, otteniamo:

$$\int_0^\infty \text{Cos} x dx = 0 \quad (5a)$$

$$\int_0^\infty \text{Sin} x dx = 1 \quad (5b)$$

(v. [3], pag. 12)

Inoltre, dalla (5) ricaviamo:  $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R e^{ix} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{e^{iR} - 1}{i} = i$ , cioè:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} e^{iR} = 0 \quad (6)$$

da cui:  $\lim_{R \rightarrow \infty} \text{Cos} R = 0$ ,  $\lim_{R \rightarrow \infty} \text{Sin} R = 0$  (6a)

Osserviamo che:

$$\int_0^R \text{Cos} x dx = \text{Sin} R, \quad \int_0^R \text{Sin} x dx = -(\text{Cos} R - 1)$$

Passando al limite per  $R \rightarrow \infty$ , utilizzando le (5a) e (5b), ritroviamo le (6a).

1.2 – Ora, applichiamo il 1° teorema integrale di Cauchy all'integrale

$\int_c e^{-iz} dz$  lungo la curva chiusa  $c$ , costituita dallo stesso arco di circonferenza, di raggio  $R$ , posto nel 4° quadrante, e dai due lati del settore circolare, (Fig.3).

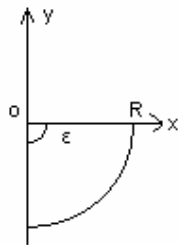


Fig. 3

Operando, abbiamo:

$$\int_R^0 e^{-ix} dx + \int_{-\pi/2}^0 e^{-i\operatorname{Re}^{i\varphi}} \operatorname{Re}^{i\varphi} id\varphi + \int_0^R e^t idt = 0 \quad (7)$$

Il valore dell'integrale lungo l'arco della circonferenza di raggio  $\varepsilon$ , per  $\varepsilon \rightarrow 0$ , tende a zero.

Ora,  $\int_0^R e^t idt = -\int_0^R e^{-t} idt$ , e, quindi:  $-\int_0^\infty e^{-t} idt = -i$ ;

$$\int_{-\pi/2}^0 e^{-i\operatorname{Re}^{i\varphi}} \operatorname{Re}^{i\varphi} id\varphi = \int_0^{\pi/2} e^{-i\operatorname{Re}^{-i\varphi}} \operatorname{Re}^{-i\varphi} id\varphi = \int_0^{\pi/2} e^{-iR(\operatorname{Cos}\varphi - i\operatorname{Sin}\varphi)} \operatorname{Re}^{-i\varphi} id\varphi;$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{\pi/2} e^{-iR\operatorname{Cos}\varphi - R\operatorname{Sin}\varphi} \operatorname{Re}^{-i\varphi} id\varphi = 0$$

Inoltre, abbiamo:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_R^0 e^{-ix} dx = i; \text{ ma } \int_R^0 e^{-ix} dx = \frac{e^{-iR} - 1}{i}, \text{ e quindi,}$$

passando al limite per  $R \rightarrow \infty$ , ricaviamo:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} e^{-iR} = 0 \quad (8)$$

1.3- Una conferma della (5a) la troviamo utilizzando la seguente applicazione.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iz} dz}{e^z - 1} = \int_0^{\infty} \frac{e^{iz} dz}{e^z - 1} - \int_0^{\infty} \frac{e^{-iz} e^z dz}{e^z - 1} = \int_0^{\infty} \frac{e^{iz} dz}{e^z - 1} - \int_0^{\infty} \frac{e^{-iz} dz}{e^z - 1} - \int_0^{\infty} e^{-iz} dz$$

$$\text{Ora, } \int_0^{\infty} e^{-iz} dz = \int_0^{\infty} \operatorname{Cos}z dz - i \int_0^{\infty} \operatorname{Sin}z dz$$

Utilizzando le (5a) e (5b), abbiamo

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iz} dz}{e^z - 1} = \int_0^{\infty} \frac{2i\operatorname{Sin}z dz}{e^z - 1} + i, \text{ da cui:}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Sin}z dz}{e^z - 1} = \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iz} dz}{e^z - 1} - \frac{1}{2} \quad (9)$$

Applicando il 2° teorema integrale di Cauchy all'integrale  $\int_c \frac{e^{iz}}{e^z - 1} dz$ , lungo una curva chiusa  $c$ , come quella considerata al punto 1.1 (Fig.1), troviamo:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix} dx}{e^x - 1} + \int_{\pi}^0 \frac{e^{i\varepsilon e^{i\varphi}} \varepsilon e^{i\varphi} id\varphi}{e^{\varepsilon e^{i\varphi}} - 1} + \int_0^{\pi} \frac{e^{i\operatorname{Re}^{i\varphi}} \operatorname{Re}^{i\varphi} id\varphi}{e^{\operatorname{Re}^{i\varphi}} - 1} = \\ & = 2\pi i \lim_{z \rightarrow z_k} \sum_{k \geq 1} \frac{z - z_k}{e^z - 1} e^{iz}; \quad z_k = 2\pi i k, \quad k=1,2,3,\dots \end{aligned} \quad (10)$$

Il 3° integrale del 1° membro della (10), per  $R \rightarrow \infty$ , tende a zero;

il 2° integrale del 1° membro della (10), per  $\varepsilon \rightarrow 0$ , è uguale a  $(-i\pi)$ .

Il 2° membro della (10) è uguale a  $2\pi i / (e^{2\pi} - 1)$ .

Pertanto, dalla (10) ricaviamo:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix} dx}{e^x - 1} = i\pi + \frac{2\pi i}{e^{2\pi} - 1}, \text{ che sostituita nella (9), fornisce:}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Sin}z dz}{e^z - 1} = \frac{1}{2}(-1 + \pi \operatorname{Coth}\pi) \quad (11)$$

Abbiamo ottenuto la (11) utilizzando le (5a) e (5b).

Ma la (11) è una formula nota, (v. [1], pag. 481-3.911/2),

e ciò dimostra che le (5a) e (5b) sono formule vere ed utilizzabili.

2.0- Consideriamo, ora, l'integrale  $\int_c z^{i-1} dz$ , ed applichiamo il 1° teorema integrale di Cauchy lungo la curva chiusa  $c$ , di cui al punto 1.1 (Fig.1)

Operando, abbiamo:

$$\int_{-R}^R x^{i-1} dx + \int_0^\pi (\operatorname{Re} e^{i\varphi})^{i-1} \operatorname{Re} e^{i\varphi} i d\varphi - \int_0^\pi (\varepsilon e^{i\varphi})^{i-1} \varepsilon e^{i\varphi} i d\varphi = 0; \quad (12)$$

Per  $R \rightarrow \infty$ , il 2° integrale del 1° membro della (12) è nullo, e per  $\varepsilon \rightarrow 0$ , anche il 3° integrale del 1° membro della (12) è nullo.

$$\int_{-R}^R x^{i-1} dx = \int_\varepsilon^R x^{i-1} dx + \int_R^\varepsilon (-x)^{i-1} (-dx) = (1 - e^{-\pi}) \int_\varepsilon^R x^{i-1} dx;$$

Sostituendo nella (12), troviamo:

$$(1 - e^{-\pi}) \int_\varepsilon^R x^{i-1} dx = -i(1 - e^{-\pi})(R^i - \varepsilon^i); \text{ cioè:}$$

$$\int_\varepsilon^R x^{i-1} dx = -i(R^i - \varepsilon^i)$$

Passando al limite per  $R \rightarrow \infty$ , ed  $\varepsilon \rightarrow 0$ , e ricordando che

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^i = \lim_{R \rightarrow \infty} R^{-i}, \quad \varepsilon = 1/R, \text{ troviamo:}$$

$$\int_0^\infty x^{i-1} dx = -i \lim_{R \rightarrow \infty} (R^i - R^{-i}) \quad (13)$$

$$\text{Ora, } \int_0^\infty x^{i-1} dx = (x = e^t) = \int_{-\infty}^\infty e^{it} dt = \int_0^\infty e^{it} dt + \int_0^\infty e^{-it} dt = 2 \int_0^\infty \operatorname{Cost} dt;$$

utilizzando la (5a), dalla (13) abbiamo:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} (R^i - R^{-i}) = 0, \text{ cioè: } \lim_{R \rightarrow \infty} (e^{i \ln R} - e^{-i \ln R}) = 0 \quad (14)$$

$$\text{Quindi: } \lim_{R \rightarrow \infty} \operatorname{Sin}(\ln R) = 0 \quad (15)$$

2.1- Consideriamo, ora, l'integrale  $\int_\varepsilon^1 x^{i-1} dx$

Operando, abbiamo:

$$\int_\varepsilon^1 x^{i-1} dx = \left(\frac{x^i}{i}\right)_\varepsilon^1 = \frac{e^{i \ln 1} - e^{i \ln \varepsilon}}{i} = \frac{1 - e^{i \ln \varepsilon}}{i};$$

applicando le (5a) e (5b), abbiamo:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\varepsilon^1 x^{i-1} dx = \int_0^1 x^{i-1} dx = (x = e^{-t}) = \int_0^\infty e^{-it} dt = \int_0^\infty \operatorname{Cost} dt - i \int_0^\infty \operatorname{Sint} dt = -i.$$

$$\text{Pertanto, } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^i = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} e^{i \ln \varepsilon} = \lim_{R \rightarrow \infty} e^{-i \ln R} = \lim_{R \rightarrow \infty} R^{-i} = 0 \quad (16)$$

Analogamente, partendo dall'integrale  $\int_\varepsilon^1 x^{-i-1} dx$ , troviamo:

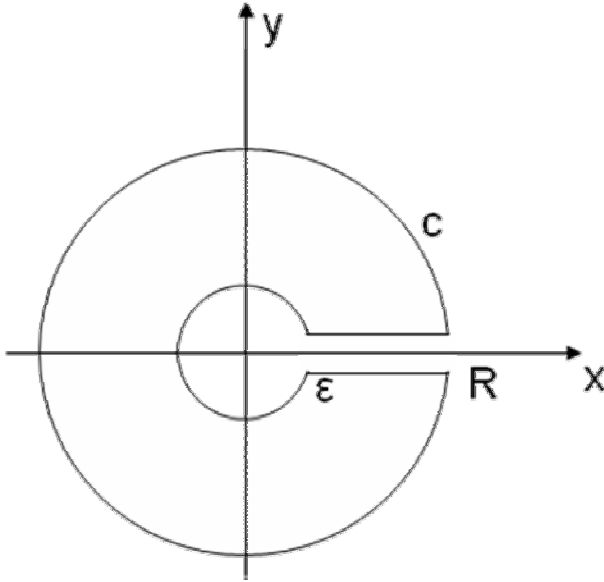
$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-i} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} e^{-i \ln \varepsilon} = \lim_{R \rightarrow \infty} e^{i \ln R} = \lim_{R \rightarrow \infty} R^i = 0 \quad (17)$$

$$\text{da cui: } \lim_{R \rightarrow \infty} \operatorname{Cos}(\ln R) = 0, \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \operatorname{Sin}(\ln R) = 0 \quad (18)$$

2.2- Consideriamo l'integrale  $\int_c \frac{z^{i-1} dz}{1+z}$ , ed applichiamo il 2° teorema

integrale di Cauchy alla curva chiusa  $c$  di fig. 4.

Fig. 4



La funzione integranda presenta un polo nel punto  $z = -1$ .

Operando, abbiamo:

$$\int_{\epsilon}^R \frac{x^{i-1} dx}{1+x} + \int_0^{2\pi} \frac{(\operatorname{Re} e^{i\varphi})^{i-1} \operatorname{Re} e^{i\varphi} i d\varphi}{1 + \operatorname{Re} e^{i\varphi}} - \int_{\epsilon}^R \frac{(xe^{2\pi i})^{i-1} e^{2\pi i} dx}{1+x} - \int_0^{2\pi} \frac{(\epsilon e^{i\varphi})^{i-1} \epsilon e^{i\varphi} i d\varphi}{1 + \epsilon e^{i\varphi}} =$$

$$= 2\pi i \lim_{z \rightarrow -1} \frac{z - (-1)}{1+z} z^{i-1} = -2\pi i e^{-\pi}; \quad (19)$$

Il 2° integrale del 1° membro della (19), per  $R \rightarrow \infty$ , diventa:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \frac{(\operatorname{Re} e^{i\varphi})^{i-1} \operatorname{Re} e^{i\varphi} i d\varphi}{1 + \operatorname{Re} e^{i\varphi}} = \lim_{R \rightarrow \infty} iR^{i-1} \int_0^{2\pi} e^{-\varphi-i\varphi} d\varphi = 0, \text{ in quanto: } \lim_{R \rightarrow \infty} R^{i-1} = 0.$$

Il 4° integrale del 1° membro della (19) tende a zero, in quanto  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^i = 0$

La somma algebrica del 1° e del 3° integrale del 1° membro della (19), è data da:

$$\int_{\epsilon}^R \frac{x^{i-1} dx}{1+x} - \int_{\epsilon}^R \frac{(xe^{2\pi i})^{i-1} e^{2\pi i} dx}{1+x} = (1 - e^{-2\pi}) \int_{\epsilon}^R \frac{x^{i-1} dx}{1+x};$$

passando al limite, per  $R \rightarrow \infty$ , e per  $\epsilon \rightarrow 0$ , troviamo:

$(1 - e^{-2\pi}) \int_0^\infty \frac{x^{i-1} dx}{1+x} = -2\pi i e^{-\pi}$ , da cui:

$$\int_0^\infty \frac{x^{i-1} dx}{1+x} = -2\pi i e^{-\pi} \frac{1}{1 - e^{-2\pi}} = \frac{-i\pi}{\text{Sinh}\pi} \quad (20)$$

Troviamo lo stesso risultato se consideriamo l'integrale  $\int_0^\infty \frac{x^{i-1} dx}{1+x} = (x = e^t) = \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{it} dt}{1+e^t}$

lungo la curva chiusa  $c$  di Fig.1, applicando il 2° teorema integrale di Cauchy.

Infatti, operando, abbiamo:

$$\int_{-R}^R \frac{e^{ix} dx}{1+e^x} + \int_0^\pi \frac{(\text{Re}^{i\varphi})^{i-1} \text{Re}^{i\varphi} i d\varphi}{1 + \text{Re}^{i\varphi}} = 2\pi i \lim_{x \rightarrow x_k} \sum_{k \geq 0} \frac{x - x_k}{e^x + 1} e^{ix};$$

$$x_k = i\pi(2k+1), \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots;$$

passando al limite, per  $R \rightarrow \infty$ , troviamo:

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{it} dt}{1+e^t} = \int_0^\infty \frac{x^{i-1} dx}{1+x} = 2\pi i \sum_{k \geq 0} \frac{1}{-1} e^{i[i\pi(2k+1)]} = -2\pi i e^{-\pi} \frac{1}{1 - e^{-2\pi}} = \frac{-i\pi}{\text{Sinh}\pi} \quad (21)$$

Risultato identico a quello della (20), ottenuto ponendo:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R^{i-1} = 0, \quad \text{e} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^i = 0$$

Inoltre, sappiamo che:

$$\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1} dx}{1+x} = \frac{\pi}{\text{Sin}(\pi\alpha)} \quad (\text{v. [2], pag.330}). \quad (22)$$

Ponendo nella (22),  $\alpha = i$ , troviamo:

$$\int_0^\infty \frac{x^{i-1} dx}{1+x} = \frac{-i\pi}{\text{Sinh}\pi} \quad (23)$$

Risultato identico a quello ottenuto dalla (20).

Dalla (21) ricaviamo:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{it} dt}{1+e^t} &= \int_{-\infty}^\infty \frac{(\text{Cost} + i\text{Sin}(t)) dt}{1+e^t} = \int_0^\infty \frac{\text{Cost} dt}{1+e^t} + \int_0^\infty \frac{\text{Cost} dt}{1+e^{-t}} + i \left( \int_0^\infty \frac{\text{Sin}(t) dt}{1+e^t} - \int_0^\infty \frac{\text{Sin}(t) dt}{1+e^{-t}} \right) = \\ &= \int_0^\infty \frac{\text{Cost} dt}{1+e^t} + \int_0^\infty \frac{(e^t + 1 - 1)\text{Cost} dt}{1+e^t} + i \left[ \int_0^\infty \frac{\text{Sin}(t) dt}{1+e^t} - \int_0^\infty \frac{(e^t + 1 - 1)\text{Sin}(t) dt}{1+e^t} \right] = \end{aligned}$$

$$= \int_0^{\infty} \text{Cost} dt - i \int_0^{\infty} \text{Sin}(t) dt + 2i \int_0^{\infty} \frac{\text{Sin}(t) dt}{1+e^t}$$

In virtù delle (5a) e (5b), nonché della (21), otteniamo:

$$\int_0^{\infty} \frac{\text{Sin}(t) dt}{1+e^t} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{\pi}{\text{Sin}h\pi}, \text{ formula nota, (v. [1], pag. 481-3.911/1).}$$

Abbiamo così dimostrato, ancora una volta, che utilizzando le (5a) e (5b), otteniamo formule note.

Riepilogando, possiamo affermare che utilizzando successivamente il 1° ed il 2° teorema integrale di Cauchy, abbiamo ottenuto, oltre le ben note formule (5a) e (5b), le seguenti formule:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} e^{iR} = 0, \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \text{Cos}R = 0, \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \text{Sin}R = 0, \quad \lim_{R \rightarrow \infty} e^{-iR} = 0,$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^i = 0, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} e^{i \ln \varepsilon} = 0, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{Cos} \ln \varepsilon = 0, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{Sin} \ln \varepsilon = 0,$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-i} = 0, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} e^{-i \ln \varepsilon} = 0,$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R^i = 0, \quad \lim_{R \rightarrow \infty} e^{i \ln R} = 0, \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \text{Cos}(\ln R) = 0, \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \text{Sin}(\ln R) = 0$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R^{-i} = 0, \quad \lim_{R \rightarrow \infty} e^{-i \ln R} = 0,$$

In conclusione, le formule (5a) e (5b) sono vere ed utilizzabili,

mentre le formule (6), (6a), (8), (16), (17) e (18) forniscono i valori dei limiti delle funzioni prese in esame.

Per i limiti suddetti, le formule trovate rappresentano solamente espressioni matematiche, ottenute applicando il primo ed il secondo teorema integrale di Cauchy, prescindendo dal concetto di limite.

Secondo il concetto di limite le espressioni:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \text{Sin}R, \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \text{Cos}R, \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \text{Sin}(\ln R), \quad \text{e} \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \text{Cos}(\ln R) \quad (24)$$

presentano valori indeterminati che variano da -1 a +1.

Per le espressioni indicate nella (24), coesistono i valori  $+1$  e  $-1$

Ringraziamo vivamente il Prof. Ing. Filippo Aluffi Pentini, dell' Università di Roma "La Sapienza", per i suoi utilissimi suggerimenti.

Riferimenti:

[1] I.S.GradshTEyn/I.M.Ryzhik

Table of INTEGRALS, SERIES, AND PRODUCTS

Academic Press, Inc. London 1980

[2] A. Ghizzetti, L. Marchetti, A. Ossicini

Lezioni di complementi di matematica

Università degli Studi di Roma, 1972

[3] G. H. Hardy – DIVERGENT SERIES

MacMillan And Co – London 1949

Pasquale Cutolo

p.cutolo@inwind.it