Le Terne Pitagoriche particolari

“La Formula Risolutiva”

di Giovanni Di Maria
email: calimero22@freemail.it

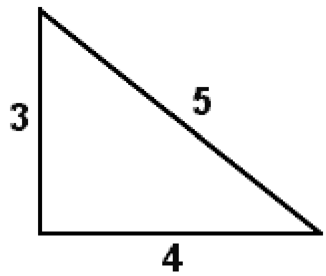
agosto 2008

(3ª Parte)

Questo terzo articolo pone fine alla ricerca sistematica di algoritmi e tentativi iterativi, in quanto propone una “formula diretta” per il calcolo e la determinazione della Terna Pitagorica Particolare, con distanza tra i cateti pari all’unità.

La formula risolutiva, naturalmente implementabile su qualsiasi sistema e con qualsiasi linguaggio di programmazione, ha lo scopo di ricavare direttamente, ed in tempi rapidissimi, la misura dei cateti e dell’ipotenusa, rispettando la condizione che i due cateti devono essere a distanza 1, cioè la loro differenza deve esse pari all’unità.

Ricordiamo che il più piccolo triangolo rettangolo che corrisponde a questa specifica è il seguente:



I due cateti hanno differenza 1 e l’ipotenusa calcolata è intera.

I precedenti due articoli, che invito comunque a rileggere, presentavano metodi e algoritmi per la ricerca delle Terne Pitagoriche Particolari ma, applicando un metodo iterativo e ricorrendo a dei “salti” sofisticati, il tempo di calcolo era inaccettabile, specialmente all’aumentare del numero delle cifre delle tre dimensioni.

Ecco perché mi sono messo alla ricerca di una formula che, direttamente e velocemente, desse il risultato, senza applicare alcun algoritmo ma eseguendo semplicemente alcuni calcoli. Naturalmente, per la determinazione di dimensioni “titaniche”, cioè composte da migliaia di cifre, è indispensabile un elaboratore elettronico ed un adeguato programma di calcolo a precisione illimitata.

Ricordiamo le condizioni base per l'esistenza ed il calcolo di una terna pitagorica particolare corretta:

- Le tre dimensioni devono soddisfare l'equazione $c1^2 + c2^2 = ipo^2$;
- Le dimensioni devono essere numeri interi, senza decimali;
- la misura di un cateto deve essere consecutiva (quindi distante di una unità) all'altro cateto.

La scoperta di un nesso

Dopo settimane di studio, ricerca e tentativi, ho trovato alcuni elementi che caratterizzavano la successione ordinata delle Terne Pitagoriche Particolari, che adesso vado ad evidenziare. Ripropongo l'elenco delle prime 10 Terne Pitagoriche Particolari, già visto nei precedenti articoli, indicando l'esistenza di alcuni nessi:

Progr.	CATETO 1	CATETO 2	IPOTENUSA		Rapporto di Cateto1 e Cateto1 precedente
1	3	4	5		
2	20	21	29		6,666666667
3	119	120	169		5,950000000
4	696	697	985		5,848739496
5	4.059	4.060	5.741		5,831896552
6	23.660	23.661	33.461		5,829021927
7	137.903	137.904	195.025		5,828529163
8	803.760	803.761	1.136.689		5,828444631
9	4.684.659	4.684.660	6.625.109		5,828430128
10	27.304.196	27.304.197	38.613.965		5,828427640

Ecco le caratteristiche matematiche che mi hanno permesso di determinare finalmente la formula risolutiva:

- Il rapporto tra un cateto di una terna e lo stesso cateto precedente tende al numero irrazionale 5,828427125. Questo numero, studiato già in precedenza è equivalente all'espressione:

$$5{,}828427125 = 3 + \left(2\sqrt{2}\right)$$

o meglio ancora:

$$5{,}828427125 = 3 + \sqrt{8}$$

- Il rapporto tra l'ipotenusa ed un cateto tende al numero irrazionale 1,414213562 che, come si sa, equivale alla radice quadrata di 2:

$$1{,}414213562 = \sqrt{2}$$

- Eseguendo svariate interpolazioni, allo scopo di applicare un adeguato "curve fitting", ho finalmente trovato la **formula risolutiva** per determinare la ennesima terna pitagorica particolare, secondo il modello di equazione denominato "Modified Power":

$$\text{ipotenusa}(x) = a\, b^{x}$$

dove:

- *Ipotenusa* è naturalmente la misura dell'ipotenusa intera da calcolare;
- *(X)* è il numero d'ordine dell'ipotenusa, ed in generale, di tutta la Terna Pitagorica Particolare;
- *"a"* è una costante irrazionale pari a 0,8535539. Dopo giorni di studio ho realizzato che essa è pari a:

$$a = 0{,}8535539 = \left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{8}}\right)$$

- *"b"* è una costante irrazionale pari a 5,8284271 e come detto sopra essa è pari a:

$$b = 5{,}828427125 = \left(3 + \sqrt{8}\right)$$

- *"x"* è semplicemente il numero d'ordine della terna che si vuol cercare, come ad esempio la 20ma, la 50ma e così via.

Generalizzando le formule, sostituendo le costanti e raggruppandole per intero si ha:

$$\mathrm{ipotenusa(x)} = \left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{8}}\right)\left(3 + \sqrt{8}\right)^{\mathrm{x}}$$

$$\mathrm{cateto1(x)} = \frac{ipotenusa(x)}{\sqrt{2}}$$

$$\mathrm{cateto2(x)} = cateto1(1) + 1$$

Un esempio pratico

Vogliamo determinare le dimensioni della Terna Pitagorica Particolare numero 10. Con le formule di cui sopra, determiniamo dapprima la misura dell'ipotenusa:

$$\mathrm{ipotenusa}(10) = \left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{8}}\right)\left(3 + \sqrt{8}\right)^{10}$$

Ipotenusa = 38613964,99999999676282919922 che arrotondiamo a 38.613.965.

* * *

Per la determinazione del cateto minore, dividiamo la misura dell'ipotenusa per la radice quadrata di 2, dal momento che il loro rapporto è pari a questo valore:

$$\mathrm{cateto1}(10) = \frac{ipotenusa(10)}{\sqrt{2}}$$

Cateto1 = 27304196,50000000457805085017 che arrotondiamo a 27.304.196.

* * *

Per la determinazione del cateto maggiore, aggiungiamo semplicemente 1 alla misura del cateto minore:

$$\mathrm{cateto2}(10) = cateto1(10) + 1$$

Cateto2 = 27304196 + 1 = 27.304.197.

Calcoliamo la terna n° 4977

Nella seconda parte del trattato, abbiamo calcolato la 4977ma terna, composta da quasi 4000 cifre, in un tempo di circa 10 ore!

Applicando la formula sopra descritta, è possibile risalire alla misura delle tre dimensioni, in un tempo pressoché immediato.

$$\text{ipotenusa}(4977) = \left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{8}}\right)\left(3 + \sqrt{8}\right)^{4977}$$

12033793228687305824617526841936296882123371717334829872740782187992536651032187
26354834184942039300826927544510686867155335300130674505329092315550424999670690
43732301275831139143722108520136677536656468921412131185601958573333214064881564
22057282696591957147775740624663559204371818670580650581729118524304317114410311
00397824753445333962228366297221082009856678173989139252157246769138161296265736
22181310549299237371694130916779237877415803551216924761752970864321941072315113
63234711038067724705921854460000674385094993378767017377742964240759236331009487
61918618156747882382507180140590956356168774178353099468236945584572483941062407
46151450708965397258298025762887810032741597077263772119614350309627939177583705
52976055677022604025412320748043496121350306124450584719376972005776996409826977
27249478022970290202822657976140102521659429187911799143461267564173647454833816
94550420457612273931734045639412956493457942340725826318331809185210915065346478
53719122336255274414644775839031815691237725345478392990625114803711547940296477
94771610293610359104730280425477418831084984698447354167248852048370608326469671
58189997409134277916905745737402870931564505580238597297114889481615784492555571
42745249091279182395741883863166667450004103169511652481457125908285031064473229
24118497646993450311234825831468814825897258758403090811447388077307134514844265
62329840020526964394236503511774649265084943234305113588206939314979860424912298
07522962045419699981064749030277077714625828591602935891825016175971272603162274
71959829924489509913391706899803425910160246229925914549176475216498001793851230
89443836906383156431867828745904816526245588186641551971404113038240928060308253
38910171874199530461184578731196797605811420331023922880927416387494865468662914
44818689967538256189842240503466393634653380908480705516441454991445901416061469
47102740579435481932090332254700242791935373312242047033331881479762246646968682
28826676544686328153049998488745293797554038272707520247134820168076620147718846
08370986963714424790944955967560185700670834252392765237976425217707864538990082
51686106259328929667460633437370221544921875892860356107975363158356907106301598
78514017357800880498374696351251115326755489647064625783809500056065176387833800
40219154290429775725544915222523762524425825997218136288415594997599304504305639
95007355663987488480673006755969013067404364956524621378266499166306961440574183
13669364507038145560430504881592389341385118592936776060818047309729515027906492
07681813128554280502534533376844004278628651635759966350662807823623169318603304
97692006709889854856977121336227289382788077875714583467731855254753141768600700
09507332180828988111792717154810160343405339437080379056102634579050801519173358
60816757807005766712812248811582576383303713756939406621173282177811641164628026
61580697469580428506098597321948622818848736934848678448558996159840017219682327
74109473141952752570806942817010063732102851244363543746792218598747567254630035
33035286516917708893440466206614253161678305259778831684690298575842010738436987
25128182992772738583379412245515673546640843796717616255197340587594716294494088
73205514864692034960132594470087123256689339731337774592364361020803271493689004
18724710527328927536051715517620465023002959007926105313518359338059278956637199
45276110436126734543756435102757439826827697674381649996377869079187790254838447
83225855642922937095967406427217357122528651079569051990788755575282781670025900
74608869554486589495009137169149377332233417433424321101802785670955723974992989
21145797285430231216218010489876492716898326714015402693018484179084770207723805
75351747515056163837924204281676949052137084787166914851480679398932190364358842
13447013558789546752436452774908101965886704254604181696318853089323283517939972
53618032798300861041664977007549282102464035326422

$$\text{cateto1}(4977) = \frac{ipotenusa(4977)}{\sqrt{2}}$$

85091767954015520131711108036506634344932738354265465413721439800973511888385702
64881295045974006218093004261495887452598654128186410720015471907336636195960068
42319227923582362489287896755382449288625644555189029868948109667952030675480866
81642480479977543770393938117485150800780838400365429736765500146359844883766153
64461087981121924934807320074380176007856379810556699409727631356149494565040977
20526563535530469550503919191829488204691779265500180131203510132360805557079207
13211548876223728337750537121509342788586183931692296743564955402072325876095768
25406006234778855464677986766889709520082576016460079154154322351663407058685729
91376600142185854340273043801500330356165283263703003112277505541339847934931277
67351192224078838880987025045030614619882875118101904211137974999054995541573751
88062854807561205371043435926687940254331007141640628413694940449284954239618556
42663687808817611307946013443632238811545372216958531452297497474333116844451416
88198399240198255903378125668746213651139416808488813801316752573401233288533788
07339731233582647441830019731690089960569575743206004981815021073392634092642534
972278710268379263817800261974920551461835508295676323460006394999942446937982679
34624050977498577931965591043298928004720813173025623049479888188283706562208642
04884782700684583181301282013240116611556348600617745922384813030827608288247682
77827215909392519504594041153716808301274329353265354047553449468968368387591956
56506574764484138964026592316389902616147842983474921367674639765992430712244931
56242161478835888746997885558888204795335694324466060680041515284742715684329230
65520580607644099970191344629037947109642363345790114911865982215105139553286109
19987922598218367747293012391564908008658575683495161332036771478968513273475668
46735864343218544662101362783092660392393040153359956192151489490983246408243407
39316554096929790706719123179840915104308789176161989240493466214734653692598884
96686436654005605728742749271841127133266771270867026998402357596497438196747787
61709858693233402621955968576580414264192117026363778545668636276185888303008348
30573790660202060162172580194255776587172762406396986671144599106019368617909898
14919296929084620990303238219585782864428479207448542715273692108003155056333803
33461376004844010508079541431267482307017419472683877515102219713666824297668012
03585642328633903431388323154143652480094636776820299725502963749618817677689150
60648212711534613304309572798332475438924622848235611600786209352644045126930548
10537184750277121070632987225956522046362520990987845978465681676067700787300458
42764557932143823902939237619004495050087958840224054910757824252196171778530395
40073349789503843341246949173363940416703076761551340126639752377263187678855609
45259515556136518403297779764437647108302532639266938925441074786794983296718688
95785185688373417709951904429741582228411987215821515985600608406349225705169161
34368361003731538519967775200206476051855213713393954352317267136327154057258830
00416365452997967646003979897831926534210483240243340265732173236362533669841399
13465811938019136339755430437104606945471428160653924558772345018583303665544749
01774985817306793442906284226897775720875618084106915926383849244662316876893963
29357822246212267891676799390415918850251122320083840193260849487305691988397141
38953782127653393635812071388889699452687493344262734286830916363195582506389605
26762396014901148895705438350851829240448678112011593308937886874906487369943000
07897847802159443351462134246455074605633519020115158204287956715558734278507649
59390827077697547634007861928208538818310960143267410558988463774942652380371011
98983050594993730946171406940242386056969101769871901113921235086099946035425582
13617354519280637709476966346420569724419119022883126595324480834552527465636643
90906003600940135440357355613910897013528872550179

$$\text{cateto2}(4977) = cateto1(4977) + 1$$

85091767954015520131711108036506634344932738354265465413721439800973511888385702
64881295045974006218093004261495887452598654128186410720015471907336636195960068
42319227923582362489287896755382449288625644555189029868948109667952030675480866
81642480479977543770393938117485150800780838400365429736765500146359844883766153
64461087981121924934807320074380176007856379810556699409727631356149494565040977
20526563535530469550503919191829488204691779265500180131203510132360805557079207
13211548876223728337750537121509342788586183931692296743564955402072325876095768
25406006234778855464677986766889709520082576016460079154154322351663407058685729
91376600142185854340273043801500330356165283263703003112277505541339847934931277
67351192224078838880987025045030614619882875118101904211137974999054995541573751
88062854807561205371043435926687940254331007141640628413694940449284954239618556
42663687808817611307946013443632238811545372216958531452297497474333116844451416
88198399240198255903378125668746213651139416808488813801316752573401233288533788
07339731233582647441830019731690089960569575743206004981815021073392634092642534
97227871026837926381780026197492055146183550829567632346000639499942446937982679
34624050977498577931965591043298928004720813173025623049479888188283706562208642
04884782700684583181301282013240116611556348600617745922384813030827608288247682
77827215909392519504594041153716808301274329353265354047553449468968368387591956
56506574764484138964026592316389902616147842983474921367674639765992430712244931
56242161478835888746997885558888204795335694324466060680041515284742715684329230
65520580607644099970191344629037947109642363345790114911865982215105139553286109
19987922598218367747293012391564908008658575683495161332036771478968513273475668
46735864343218544662101362783092660392393040153359956192151489490983246408243407
39316554096929790706719123179840915104308789176161989240493466214734653692598884
96686436654005605728742749271841127133266771270867026998402357596497438196747787
61709858693233402621955968576580414264192117026363778545668636276185888303008348
30573790660202060162172580194255776587172762406396986671144599106019368617909898
14919296929084620990303238219585782864428479207448542715273692108003155056333803
33461376004844010508079541431267482307017419472683877515102219713666824297668012
03585642328633903431388323154143652480094636776820299725502963749618817677689150
60648212711534613304309572798332475438924622848235611600786209352644045126930548
10537184750277121070632987225956522046362520990987845978465681676067700787300458
42764557932143823902939237619004495050087958840224054910757824252196171778530395
40073349789503843341246949173363940416703076761551340126639752377263187678855609
45259515556136518403297779764437647108302532639266938925441074786794983296718688
95785185688373417709951904429741582228411987215821515985600608406349225705169161
34368361003731538519967775200206476051855213713393954352317267136327154057258830
00416365452997967646003979897831926534210483240243340265732173236362533669841399
13465811938019136339755430437104606945471428160653924558772345018583303665544749
01774985817306793442906284226897775720875618084106915926383849244662316876893963
29357822246212267891676799390415918850251122320083840193260849487305691988397141
38953782127653393635812071388889699452687493344262734286830916363195582506389605
26762396014901148895705438350851829240448678112011593308937886874906487369943000
07897847802159443351462134246455074605633519020115158204287956715558734278507649
59390827077697547634007861928208538818310960143267410558988463774942652380371011
98983050594993730946171406940242386056969101769871901113921235086099946035425582
13617354519280637709476966346420569724419119022883126595324480834552527465636643
90906003600940135440357355613910897013528872550180

Giovanni Di Maria

APPENDICE

In questa pagina viene mostrato il sistema di equazioni lineari che caratterizza la composizione e le caratteristiche delle Terne Pitagoriche Particolari. Tali proprietà non possono applicarsi naturalmente agli altri tipi di Terne Pitagoriche.

$$
\begin{cases}
ipo^2 = cat1^2 + cat2^2 \\
ipo = \mathrm{int}(ipo) \\
cat2 = 1 + cat1 \\
\dfrac{cat1(x)}{cat1(x-1)} \approx \sqrt{8} + 3 \\
\dfrac{ipo}{cat1} \approx \sqrt{2} \\
ipo(x) = \left(\dfrac{1}{2} + \sqrt{\dfrac{1}{8}} \right) \left(\sqrt{8} + 3 \right)^x
\end{cases}
$$

Giovanni Di Maria