IL TEOREMA DI PITAGORA

E I NUMERI PRIMI

(Connessioni con altri teoremi e congetture)

Abstract

In this paper, we connect the Pitagorean Theorem with:

1) ex Goldbach conjecture and new fast factoring.

2) Albert Girard Theorem.

3) Birch and Swinnerton Dyers conjecture and elliptical curves.

In questo lavoro mettiamo in evidenza le

connessioni tra il teorema di Pitagora (TDP) con l'ultimo Teorema di Fermat,con la nostra soluzione della congettura di Goldbach e con un nuovo metodo di fattorizzazione; con il teorema di Girard: i numeri primi di forma p = 4n + 1 sono somme di due quadrati), e con la congettura di Birch e Swinnerton - Dyer sulle curve ellittiche.

Introduzione

Il notissimo e ormai millenario Teorema di Pitagora, che per brevità chiameremo TDP, ha qualche relazione ancora inesplorata con i numeri primi, e di conseguenza con le relative congetture: Goldbach, gemelli, fattorizzazione più veloce; e, anche se più vagamente, anche con la congettura di

Birch e Swinnerton- Dyer su possibili infiniti punti razionali sulle curve ellittiche.

1. Connessione con l'ultimo teorema di Fermat, con Goldbach e con la fattorizzazione.

Tale teorema, pur non avendo direttamente a che fare con i numeri primi, si basa sulla formula o terna pitagorica per eccellenza:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

con a e b cateti, e c ipotenusa di un qualsiasi triangolo rettangolo. Tale teorema, com'è noto, è stato già dimostrato da Andrew Whiles nel 1994.

Tale dimostrazione dice che nell' equazione

$$a^n + b^n = c^n \qquad (1)$$

non esiste un numero n > 2 che possa soddisfarla.

Ma tale equazione sarà, da ora in poi, il nostro riferimento per le connessioni sopra accennate tra TDP e numeri primi, tramite alcune sue varianti.

La congettura di Goldbach dice che qualsiasi numero pari N $\geq$ 4 è la somma di due numeri primi. Ma esiste una formula che connette un prodotto N tra due numeri qualsiasi a e b, con la loro semidifferenza e la loro semisomma:

$N = c^2 - b^2$ con c = semisomma (da qui Goldbach) e b = semidifferenza; ne consegue che

$N + b^2 = c^2$, e ponendo $N = p \times q$ con p e q numeri primi (caso particolare che ci interessa in

questo lavoro), esistono anche le relazioni

$p = c - b$, $q = c + b$ (2)

quando p e q non si conoscono in partenza, ma si conosce il solo prodotto N = p x q. Per risalire a p e q, e quindi fattorizzare N, bisogna aggiungere ad N tutti i quadrati successivi finchè la somma

$N + b^2 = c^2$ non sia un quadrato perfetto, e si possono applicare le relazioni (2) per trovare p e q

Questo per quanto riguarda la fattorizzazione veloce

Circa il TDP, nella formula $c^2 = N + b^2$ il valore di N , pur non essendo un quadrato perfetto, è tuttavia il quadrato del cateto a, per cui

ora abbiamo la terna pitagorica:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

dove solo c e b sono interi, e a è decimale, il chè però non gli impedisce di essere un cateto di un triangolo rettangolo a cui applicare il TDP: Per esempio, il triangolo con lati c (ipotenusa, a e b cateti)

c = 10, 630145 b = 7 e a = 8

con c = √ 49 + 64 = √113 = 10,630145, ipotenusa

da cui a = √(113 - 49) = 8 e b = √(113 – 49) = 7, con 8 e 7 cateti e il TDP è ugualmente soddisfatto.

Per quanto riguarda i numeri primi, facciamo un solo esempio: p x q = N = 13 x 19 = 247

$$N=\left(\frac{13+19}{2}\right)^2-\left(\frac{19-13}{2}\right)^2=16^2-3^2=256-9=247$$

da cui $N + d^2 = 247 + 9 = 256 = 16^2 = s^2$, e

$p = s - d = 16 - 3 = 13$, $q = s + d = 16 + 3 = 19$

quindi, avendo solo $N = p \times q$, per trovare s e d, si aggiungono i successivi quadrati d^2d ed N fino ad ottenere un quadrato perfetto $= s^2$ da cui estrarre la radice quadrata s, alla quale sottrarre N ed aggiungere d per ottenere p e q :

$N + d^2 = s^2$:

$247 + 1 = 248$ non quadrato perfetto

$247 + 4 = 251$ non quadrato perfetto

$247 + 9 = 256$ quadrato perfetto di $16 = s$,

e   d = $\sqrt{9}$ = 3,   tali che

$16 – 3 = 13 = p$,   e $16 + 3 = 19 = q$, e la fattorizzazione è fatta; ovviamente per numeri molto più grandi, tipo i numeri RSA della crittografia, il procedimento è più lungo, ma sempre meglio che con la fattorizzazione tradizionale, specialmente se la semidifferenza tra i due numeri primi è piccola (in tal caso occorrono solo d tentativi per trovare contemporaneamente d ed s)

Un caso limite particolare sono i numeri primi gemelli, il cui prodotto è sempre di forma Q -1, con Q = quadrato perfetto, per cui basta aggiungere 1

per avere immediatamente s^2 e d = 1 =√1 = √d ,

essendo d = 1 = semidifferenza di 2, la differenza

tra due primi gemelli. Un esempio per tutti:

N = 143, N + 1 = 144 = 12^2 = s^2 con d = 1

e quindi p = 12 - 1 = 11 e q = 12 + 1 = 13

con 11 e 13 numeri primi gemelli (13 – 2 = 11),

e p x q =11x13=143, di forma Q – 1 = 144 -1 =143.

Nel caso dei gemelli e il TDP, uno dei cateti è

uguale ad 1, e la formula pitagorica diventa

2

N + 1 = c^2 = s^2 , con N = p x q con p e q

gemelli, valida per tutti i triangoli rettangoli con

un cateto b = 1, l'altro cateto a = √N non intero

e ipotenusa c = s.

Ecco quindi il primo legame tra il TDP e i

numeri primi, tramite la fattorizzazione, tramite i

quadrati perfetti d^2 ed s^2 con cateti $a = d$,

$b = \sqrt{N}$ e ipotenusa $c = s$, tali che

$a^2 + b^2 = c^2$ equivalente a $d^2 + N = s$.

Oltre al caso limite dei gemelli, abbiamo anche

l’altro caso limite dei quadrati perfetti, in cui

$d = 0$, cioè p e q coincidono $p = q$, e $q – p = 0$;

in questi casi si ha $N + 0^2 = s^2 = N$; col TDP la

relazione ora è

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$0^2 + N = N = n^2 \text{ con } n = \sqrt{N},$$

e il triangolo rettangolo si riduce al segmento

lineare N quadrato perfetto, con il cateto $a = 0$,

il cateto $b = N = n \times n$ e l'ipotenusa $c = N$, quindi

$b = N$, dato che $q - p = n - n = 0 = d$

2) Seconda connessione tra numeri primi e TDP.

Un 'altra connessione tra numeri e TDP è che, per il teorema di Albert Girard, i numeri primi di forma $p = 4n + 1$ sono anche la somma di due quadrati (Rif. 2)

Ora invece abbiamo p come ipotenusa, anziché $N = p \times q$ come nel caso precedente) .

$a^2 + b^2 = c^2 =$ con $c = p$ numero primo di

forma $4n + 1$; quindi il nuovo triangolo rettangolo è formato dai cateti a e b e dall'ipotenusa $c = \sqrt{p}$; e poiché p non è mai quadrato perfetto, l'ipotenusa c

è sempre un numero decimale. Alcuni esempi:

37 = 36 + 1 = 6^2+ 1^2 con c = √37 = 6,0827625

61 = 36 + 25 = 6^2 + 5^2 con c = √61 = 7,8102496

109 = 100 + 9= 10^2+ 9^2 con c = √109= 10,440306

… … … … …

37 = 4 x 9 +1

61 = 4 x 15 +1

109 = 4 x 27 +1
… …

Come si vede, n di 4n +1 è sempre un multiplo di 3,

e la forma 4n+1 corrisponde alla formula dei

numeri primi 6n’ ±1, dove n’ = n / 1,5

37 = 6 x n’ +1 = 6 x 6 +1 , 6 = 9/1,5

61 = 6 x n’ +1 = 6 x 10+1 10 = 15/1,5

109 = 6 x n’ +1 = 6 x 18 +1 18=27 /1,5

e i numeri primi di forma 4n +1 sono anche tutti di forma 6n’+1poichè i numeri di forma 4n + 3 sono tutti multipli di 3e i numeri di forma 4n + 5 sono numeri primi di forma 6n’ -1, l’altra forma generatrice di numeri primi, come pure 4n +1, ma solo questi possono essere somma di due quadrati.

3. Terza ed ultima connessione tra numeri primi e il TDP.

L’ultima connessione da noi trovata tra il TDP e i numeri primi riguarda la congettura di Birch e Swinnerton-Dyer, un altro dei sei problemi del millennio.

Ecco cosa scrive Keith Devlin nel suo libro

“I problemi del millennio” (Longanesi Ed.), capitolo 6, pag. 237, iniziando con il TDP per introdurre l’argomento delle curve ellittiche collegate alla suddetta congettura:

Sapere quando un’equazione non può essere risolta”
“Base per altezza diviso due”

Un classico problema, noto anche agli antichi greci,può essere posto in questi termini. Supponiamo di avere un numero intero d. Esiste un triangolo rettangolo i cui lati siano numeri razionali (ovvero, numeri interi o frazioni) la cui area sia esattamente uguale a d? (da non confondere ora d con la semidifferenza d = (q-p)/2 delle pagine precedenti, N.d.A.A.)
Nel caso d = 6, la risposta è si. Il famoso triangolo rettangolo pitagorico con lati 3, 4, 5 unità, mostrato nella fig. 6.1, ha infatti come area A = $\frac{1}{2}$ x base x altezza = $\frac{1}{2}$ x 4 x 3 = 6.
Nel caso d = 5, sebbene non esista un triangolo rettangolo di area 5 con lati corrispondenti a numeri interi, esiste tuttavia il triangolo di lati 3/2, 20/3 e 41/6, mostrati nella fig. 6.2

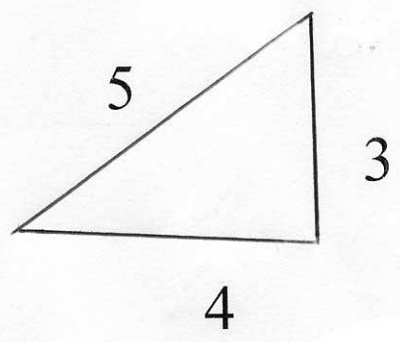

Fig 6.1 Triangolo rettangolo con lati interi e di area 6

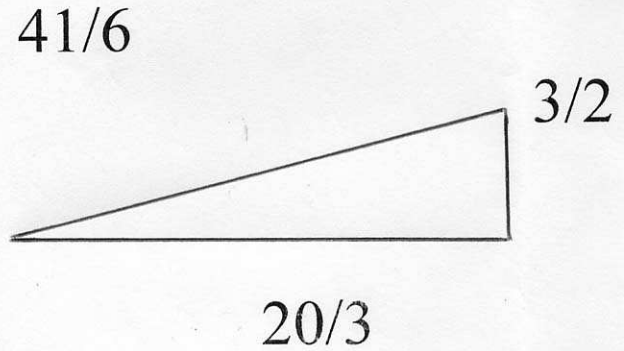

Fig. 6.2 Triangolo rettangolo con lati razionali e di area 5

Dimostrare che esiste un triangolo rettangolo con lati razionali e area d se – e solo se – l'equazione

$$y^2 = x^3 - d^2 \cdot x$$

ha soluzioni razionali per x e y, con y diverso da 0, comporta un ragionamento algebrico abbastanza semplice.

Le equazioni con formula generale

$$y^2 = x^3 + ax + b$$

dove a e b sono numeri interi, determinano le curve denominate "ellittiche"; in altre parole, il grafico di una tale equazione è una curva ellittica…"

Per le relazioni tra le curve ellittiche, l'aritmetica modulare, i numeri primi le funzioni di identità

$$\prod_{p < M,\ p \text{ primo}} = \frac{p}{Np} \qquad (2)$$

e funzione zeta di Riemann

$$\zeta(s) = \prod_{p = \text{primo}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} \qquad (3)$$

ecc. rimandiamo al suddetto libro di K. Devlin,

ricordando in questo lavoro il contributo iniziale

del TDP per a, b e c razionali e degli infiniti numeri primi coinvolti, poiché sono numeri interi e quindi anche razionali (p = p/1).

La suddetta congettura di Birch e Swinnerton-Dyer è un'estensione ai numeri razionali a, b, e c (con area d = intero) dell'ultimo teorema di Fermat:

$a^2 + b^2 = c^2$ con a, b, c interi,

e quindi a tutte le possibili terne pitagoriche.

Con la suddetta congettura, a, b e c sono numeri razionali e danno luogo alle terne pitagoriche di tipo a = 20/3, b = 3/2 e c = 41/6 relativi al triangolo rettangolo della fig. 6.2.

La congettura di Birch e Swinnerton-Dyer non

ancora dimostrata, dice che la curva ellittica avrà un numero infinito di punti razionali se, e solo se,

$$L(E, 1) = 0 \quad \text{dove} \quad L(E,1) = \prod_{p} \frac{p}{Np} \qquad (4)$$

ed ecco i numeri primi p coinvolti anche nella (4), che riguarda la congettura di Birch e Swinnerton-Dyer, così come sono coinvolti, come abbiamo visto nelle connessioni 1. e 2. , anche nella fattorizzazione tramite la ex- congettura di Goldbach e nel teorema di Girard sui numeri primi di forma p = 4n +1 (quadrati di ipotenuse) come somma di due quadrati.

A cura della Prof. Annarita Tulumello

del gruppo ERATOSTENE

Nota

Ricordiamo che Pitagora disse: “Tutto è numero” (poi diventato motto della scuola pitagorica), e che secoli dopo, Galilei riteneva anche lui, giustamente, che “il mondo è scritto con caratteri matematici” e quindi con i numeri. Infine, noi del gruppo ERATOSTENE, abbiamo scoperto i numeri primi naturali, di forma 6f $\pm$ 1, con f = numeri della serie di Fibonacci, e, come questi, presenti in molti fenomeni naturali (I numeri primi normali sono invece di forma 6k $\pm$ 1, con numeri naturali, anche se non tutti.

Per es. 19 = 6 x 3 +1 è numero primo ma anche

numero primo naturale, poiché f = 3 è un numero di Fibonacci, mentre 41= 6 x 7 - 1 è un numero primo normale, ma non 35 = 6 x 6 -1, numero composto.

Riferimenti

1.) “Fattorizzazione con i quadrati perfetti nell’ambito delle forme 6k ± 1” sul nostro sito www.gruppoeratostene.com

2.) “Dimostrazione del teorema di Girard” idem.

3.) “Lavori vari del Prof. Giovanni Di Maria sulle terne pitagoriche, idem.

4.) Lavori vari del gruppo ERATOSTENE, idem

5.) “Sulle spalle dei giganti”, idem.

6.) “Connessioni tra numeri primi, primi naturali e

fenomeni naturali", idem.