

**FORUM - DISCUSSIONE**

**Quesito sulla Funzione Zeta di Riemann proposto dall' ing. Pasquale Cutolo  
p.cutolo@inwind.it**

Consideriamo le relazioni:

$$\sum_{k \geq 1} \frac{(\ln k)^m}{k} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\ln n)^{m+1}}{m+1} = \gamma_m, \quad m \in \mathbb{N} \quad (\text{A})$$

$$\zeta(s) - \frac{1}{s-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \gamma_k}{k!} (s-1)^k \quad (\text{B})$$

Le  $\gamma_m$  sono note come le costanti di Stieltjes (vedasi [1], pag. 118; [2], pag. 12).

E' noto inoltre che:

$$\lim_{s \rightarrow 1^+} \zeta^{(m)}(s) = \zeta^{(m)}(1) = (-1)^m \sum_{k \geq 1} \frac{(\ln k)^m}{k} \quad (1)$$

Nel prosieguo indichiamo con  $\gamma'_m$  le costanti che figurano nella (A), e con  $\gamma''_m$  le costanti derivanti dalla (B).

1) La (A) viene ricavata considerando la relazione:

$$\sum_{k \geq 1} \frac{(\ln k)^m}{k} - \int_1^{\infty} \frac{(\ln x)^m}{x} dx = \sum_{k \geq 1} \frac{(\ln k)^m}{k} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\ln n)^{m+1}}{m+1} = \gamma'_m \quad (\text{A}')$$

Per  $m = 0$ , dalla (A) ricaviamo la ben nota relazione:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right] = \gamma_0 = \gamma = 0,5772156649 \quad (2)$$

essendo  $\gamma$  nota come la costante di Eulero-Mascheroni.

Per  $m = 1$ , dalla (A') otteniamo:

$$\sum_{k \geq 1} \frac{\ln k}{k} = \gamma'_1 + \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} (\ln n)^2$$

Utilizzando le formule (1), (A') e (2), troviamo:

$$\frac{\zeta'(1)}{[\zeta(1)]^2} = \frac{-\sum_{k \geq 1} \frac{\ln k}{k}}{\left[\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k}\right]^2} = -\frac{\gamma'_1 + \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} (\ln n)^2}{\left(\gamma + \lim_{n \rightarrow \infty} \ln n\right)^2} = -\frac{\frac{\gamma'_1}{\lim_{n \rightarrow \infty} (\ln n)^2} + \frac{1}{2}}{\left(\frac{\gamma}{\lim_{n \rightarrow \infty} \ln n} + 1\right)^2} = -\frac{1}{2}$$

In generale, utilizzando la (A') e la (2), ricaviamo:

$$\begin{aligned}
\frac{\zeta^{(m)}(1)}{[\zeta(1)]^{m+1}} &= (-1)^m \frac{\sum_{k \geq 1} \frac{(\ln k)^m}{k}}{\left(\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k}\right)^{m+1}} = (-1)^m \frac{\gamma'_m + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\ln n)^{m+1}}{m+1}}{\left(\gamma + \lim_{n \rightarrow \infty} \ln n\right)^{m+1}} = \\
&= (-1)^m \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\gamma'_m}{(\ln n)^{m+1}} + \frac{1}{m+1}}{\left(\frac{\gamma}{\lim_{n \rightarrow \infty} \ln n} + 1\right)^{m+1}} = (-1)^m \frac{1}{m+1}
\end{aligned} \tag{3}$$

2) Utilizzando la (B), che è lo sviluppo in serie di Laurent di  $\zeta(s)$ , nell'intorno di  $s = 1$ , otteniamo:

$$\lim_{s \rightarrow 1} [(s-1)\zeta(s)] = 1 \tag{4}$$

Derivando,  $m$  volte, rispetto a "s", i due membri della (B), otteniamo:

$$\begin{aligned}
\zeta^{(m)}(s) - \frac{(-1)^m m!}{(s-1)^{m+1}} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \gamma_k}{k!} (s-1)^{k-m} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1-m)} = (k-m=h) = \\
&= \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^{h+m} \gamma_{h+m}}{h!} (s-1)^h
\end{aligned} \tag{5}$$

Dividendo i membri della (5) per  $\zeta^{m+1}(s)$ , abbiamo:

$$\frac{\zeta^{(m)}(s)}{[\zeta(s)]^{m+1}} - \frac{(-1)^m m!}{[(s-1)\zeta(s)]^{m+1}} = \frac{1}{[\zeta(s)]^{m+1}} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^{h+m} \gamma_{h+m}}{h!} (s-1)^h \tag{6}$$

Passando al limite per  $s \rightarrow 1$ , il 2° membro della (6) si annulla, per cui:

$$\lim_{s \rightarrow 1} \left[ \frac{\zeta^{(m)}(s)}{[\zeta(s)]^{m+1}} - \frac{(-1)^m m!}{[(s-1)\zeta(s)]^{m+1}} \right] = 0,$$

da cui, tenendo presente la (4), ricaviamo:

$$\frac{\zeta^{(m)}(1)}{[\zeta(1)]^{m+1}} = (-1)^m m! \tag{7}$$

I procedimenti per ricavare la (3) e la (7) sembrano del tutto regolari, ma i risultati sono diversi, e **ciò è assurdo**.

Sorge naturale la domanda: **Quale delle due è ritenuta attendibile?**

La (7) sembra la più attendibile, in quanto, per  $m = 1$ , e per  $m = 2$ , troviamo un puntuale riscontro.

Infatti, sostituendo "1-s" ad "s" nella nota equazione funzionale

$$\zeta(s) = 2(2\pi)^{s-1} \sin \frac{\pi s}{2} \Gamma(1-s) \zeta(1-s),$$

otteniamo:

$$\zeta(1-s) = 2(2\pi)^{-s} \sin \frac{\pi(1-s)}{2} \Gamma(s) \zeta(s) \tag{8}$$

Prendendo il logaritmo naturale dei due membri della (8), e derivando, rispetto ad "s", troviamo:

$$-\frac{\zeta'(1-s)}{\zeta(1-s)} = -\ln(2\pi) - \frac{\pi}{2} \frac{\cos \frac{\pi(1-s)}{2}}{\sin \frac{\pi(1-s)}{2}} + \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} + \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \quad (9)$$

Dividendo ambo i membri della (9) per  $\zeta(s)$ , e passando dopo al limite per  $s \rightarrow 1$ , troviamo:

$$\frac{\zeta'(1)}{[\zeta(1)]^2} = -1,$$

lo stesso risultato che otteniamo ponendo,  $m=1$ , nella (7).

Ricordiamo che:

$$\lim_{s \rightarrow 1} \left[ \sin \frac{\pi(s-1)}{2} \zeta(s) \right] = \frac{\pi}{2}; \quad \zeta(0) = -\frac{1}{2}; \quad \zeta'(0) = -\frac{1}{2} \ln(2\pi)$$

Derivando ambo i membri della (9), rispetto ad "s", dividendo dopo i due membri per  $[\zeta(s)]^2$ , e passando dopo al limite per  $s \rightarrow 1$ , troviamo:

$$\frac{\zeta''(1)}{[\zeta(1)]^3} = 2,$$

lo stesso risultato che otteniamo ponendo,  $m = 2$ , nella (7).

Osserviamo che ponendo, nella (9),  $s = 1/2$ , ricaviamo:

$$\frac{\zeta'(1/2)}{\zeta(1/2)} = \frac{1}{2} \ln(2\pi) + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \psi\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \ln(\pi) + \frac{\pi}{4} + \frac{3}{2} \ln 2 + \frac{1}{2} \gamma;$$

ricordiamo che:  $\psi\left(\frac{1}{2}\right) = -\gamma - 2 \ln 2$ , (vedasi [3], pag. 945), e che:

$$\frac{\zeta'(1/2)}{\zeta(1/2)} = - \sum_{p=\text{prime}} \frac{\ln p}{p^{1/2} - 1}$$

Ponendo, nella (B),  $s = 0$ , ricaviamo:

$$\zeta(0) + 1 = -\frac{1}{2} + 1 = \gamma + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma_k}{k!}, \text{ da cui:}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma_k}{k!} = \frac{1}{2} - \gamma$$

Ponendo, nella (B),  $s = 2$ , troviamo:

$$\zeta(2) - 1 = \frac{\pi^2}{6} - 1 = \gamma + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \gamma_k}{k!}, \text{ da cui:}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \gamma_k}{k!} = \frac{\pi^2}{6} - 1 - \gamma;$$

ponendo, nella (B),  $s = -1$ , abbiamo:

$$\zeta(-1) - \frac{1}{-1-1} = \gamma + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma_k 2^k}{k!}, \text{ da cui:}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma_k 2^k}{k!} = \zeta(-1) + \frac{1}{2} - \gamma;$$

ricordiamo che  $\zeta(-1) = -\frac{1}{12}$  (vedasi [4], pag. 9);

Inoltre, dalla (B) otteniamo:

$$(s-1)\zeta(s) - 1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \gamma_k}{k!} (s-1)^{k+1} \quad (10)$$

Derivando successivamente i membri della (10), m+1 volte, rispetto ad "s", ricaviamo:

$$(s-1)\zeta^{(m+1)}(s) + (m+1)\zeta^{(m)}(s) = (-1)^m(m+1)\gamma''_m + f(s-1), \quad (10')$$

da cui, passando al limite per  $s \rightarrow 1$ , troviamo:

$$\lim_{s \rightarrow 1} \left[ \frac{(s-1)\zeta^{(m+1)}(s)(-1)^m}{m+1} + (-1)^m \zeta^{(m)}(s) \right] = \gamma''_m; \quad (C)$$

$$\lim_{s \rightarrow 1} f(s-1) = 0$$

Essendo  $\gamma''_m$  una costante, dalla (10') ricaviamo:

$$\lim_{s \rightarrow 1} \left[ \frac{(s-1)\zeta^{(m+1)}(s)}{\zeta^{(m)}(s)} \right] = -(m+1),$$

e per m=0, abbiamo:

$$\lim_{s \rightarrow 1} \left[ \frac{(s-1)\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right] = -1$$

Osservando il 1° membro della (10'), abbiamo:

$$\sum_{k=2}^{m+1} \binom{m+1}{k} (s-1)^{(k)} \zeta^{(m+1-k)}(s) = 0$$

3) Da quanto precede risulta che la (3) non è attendibile.

La (3) l'abbiamo ricavata ipotizzando che  $\gamma'_m$  sia costante.

**Essendo  $\gamma'_m$  una costante, dov'è l'errore?**

Per valori molti grandi di n,  $\gamma'_m$  varia notevolmente al variare di n, (vedasi tabella sottostante).

Sottraendo la (C) dalla (A'), otteniamo:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \sum_{k=1}^n \frac{(\ln k)^m}{k} - \frac{(\ln n)^{m+1}}{m+1} \right] - \lim_{s \rightarrow 1} \left[ \frac{(s-1)\zeta^{(m+1)}(s)}{m+1} + \zeta^{(m)}(s) \right] (-1)^m = \gamma'_m - \gamma''_m \quad (12)$$

E' noto che  $\gamma'_m = \gamma''_m$ , come è stato brillantemente dimostrato (vedasi [5], pagg. 9-10),

e quindi il 1° membro della (12) dovrebbe presentare un valore nullo, ma in pratica presenta un valore molto diverso da zero, come risulta osservando i valori della tabella sottostante.

Osserviamo che:

$$\int_1^{\infty} \frac{(\ln x)^m}{x} dx = (x = e^y) = \int_0^{\infty} y^m dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n y^m dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{m+1}}{m+1}$$

Pertanto, risulta lecito scrivere la (A') nella forma:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \sum_{k=1}^n \frac{(\ln k)^m}{k} - \frac{n^{m+1}}{m+1} \right] = \gamma'_m \quad (13)$$

Inoltre, ponendo, nella (5),  $s-1 = p$ , abbiamo:

$$\zeta^{(m)}(p+1) - \frac{(-1)^m m!}{(p)^{m+1}} = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^{h+m} \gamma''_{h+m}(p)^h}{h!} = (-1)^m \gamma''_m + \sum_{h=1}^{\infty} \frac{(-1)^{h+m} \gamma''_{h+m}(p)^h}{h!};$$

Ponendo, nella precedente,  $p = 1/n$ , e passando al limite per  $n \rightarrow \infty$ , troviamo:

$$\zeta^{(m)}(1) - (-1)^m m! \lim_{n \rightarrow \infty} n^{m+1} = (-1)^m \gamma''_m$$

Tenendo presente la (1), dalla precedente otteniamo:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \sum_{k=1}^n \frac{(\ln k)^m}{k} - m!n^{m+1} \right] = \gamma''_m \quad (14)$$

Dal confronto della (13) con la (14) rileviamo subito che i loro primi membri presentano formule simili, ma non identiche, Sottraendo la (14) dalla (13), abbiamo:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ m!n^{m+1} - \frac{n^{m+1}}{m+1} \right] = \left( m! - \frac{1}{m+1} \right) \lim_{n \rightarrow \infty} [n^{m+1}] = \gamma'_m - \gamma''_m, \text{ da cui:}$$

$$\left( m! - \frac{1}{m+1} \right) = \frac{\gamma'_m - \gamma''_m}{\lim_{n \rightarrow \infty} n^{m+1}} \quad (15)$$

Essendo  $\gamma'_m$  e  $\gamma''_m$  ambedue costanti, il 2° membro della (15) diventa nullo, e quindi

Abbiamo:  $m! - \frac{1}{m+1} = 0$ , cioè lo stesso risultato che si otterrebbe sottraendo la (3) dalla (7), e **ciò è assurdo**.

### Tabella

n	$\gamma'_5$	$\gamma'_6$	$\gamma''_5$	$\gamma''_6$
			0,0007933238	-0,000238769
10^16	0,0694151	- 0,0451775		
10^18	0,636854	235,516		
10^20	1,856635	-194,98		
10^22	-2,36878	-529,959		
10^24	1,48009	-1223,58		
10^26	-11,9577	-755,618		
10^28	32,8173	-158,812		
10^30	30,4519	38,433		

### Riferimenti:

- [1] Julian Havil, ‘GAMMA, Exploring Euler’s Constant  
Princeton University Press, Oxford, 2003
- [2] J. M. Bornwein, D. M. Bradley, and R. E. Crandell  
‘Computational Strategies for the Riemann Zeta Function’  
CECM-98-118, Center for Experimental and Constructive Mathematics  
Simon Fraser University, Burnaby, B.C. V5A 1S6, CANADA
- [3] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik  
‘Table of Integral, Series, and Products’  
Academic Press, INC. N.Y., 1980
- [4] Pasquale Cutolo, ‘Una nota sulle serie divergenti e loro applicazione’  
[www.matematicamente.it](http://www.matematicamente.it)
- [5] Donal F. Connon: ‘The difference between two Stieltjes constants’  
arXiv.0906.0277 [pdf], 1 June 2009

Cutolo ing. Pasquale  
p.cutolo@inwind.it

