

I QUADRATI DI FIBONACCI

(e il relativo paradosso)

Aggiornato al 10.11.2009

Gruppo Eratostene

Riassunto

In questo lavoro parleremo brevemente del noto paradosso dei “Quadrati di Fibonacci”, con accenno ai “ Rettangoli di Fibonacci” con quasi uguale area, e con lati corrispondenti a numeri alternati di Fibonacci; per esempio $8^2 = 64$ mentre $5 \cdot 13 = 65 = 64 + 1$, $13^2 = 169$, mentre $8 \cdot 21 = 168 = 169 - 1$, ecc.; e con differenza delle due aree (quadrato e rettangolo) sempre uguale ad ± 1 tranne che per le prime due terne di numeri di Fibonacci, per le quali tali differenze sono rispettivamente 0 e -1

Sul sito web “Math.it” articolo “ La spirale logaritmica e la successione di Fibonacci”, abbiamo letto del cosiddetto paradosso

di Fibonacci:

“ Un rettangolo di lati $F(n-1) = 5$ e $F(n+1) = 13$

ha un'area uguale a quella di un quadrato $F(n) = 8$ ”

Questo però non è del tutto esatto, poiché $5 * 13 = 65$, mentre $8 + 8 = 8^2 = 64$, cioè con una differenza di un'unità ($65-64=1$), e questo non solo in questo caso citato come esempio, ma anche in tutti gli altri casi, cioè quale che sia la terna di numeri di Fibonacci presa in considerazione, come vedremo.

Se chiamiamo infatti R il rettangolo e con Q il quadrato ad esso quasi equivalente, avremo sempre la relazione tra le rispettive aree

$$R \pm 1 = Q$$

con $+1$ e -1 alternati all'infinito quando si prendono in considerazione tutte le possibili terne successive, vedi successiva tabella e valori di R e Q (ed R') per ogni terna, fino alla nona.

Chiameremo $Q(F)$ questi quadrati, ossia Quadrati di Fibonacci, caratterizzati dal fatto che oltre ad essere quadrati dei numeri di tutta la serie di Fibonacci, dalla relazione

$$Q(F) \pm 1 = R'(F), \text{ e di conseguenza } Q(F) - R'(F) = \pm 1$$

Esistono anche altri Rettangoli di Fibonacci, R'' , con lati $F(n) \pm 1$, e con la relazione $Q(F) - R''(F) = 1$ (tranne che per le prime due terne) e con $F =$ numero centrale della terna.

Per $R'(8)$ e $R''(8)$ infatti abbiamo, con la terna di Fibonacci 5, 8, 13:

$$Q(8) = 8^2 = 64$$

$$R'(8) = 5 * 13 = 65 = 64 + 1 = Q(8) + 1$$

$$R'' = (8 - 1) * (8 + 1) = 7 * 9 = 63 = (Q(8) - 1) = 64 - 1,$$

il tutto ovviamente sempre con numeri interi.

Ma vediamo meglio l'andamento aritmetico con la seguente

Tabella per le prime cinque terne, con $D = Q(n) - R''$ e la decima

Terna:

TERNA	$R'=F(n-1)*F(n+1)$	$Q(n)=F(n)^2$	$R''=[F(n) - 1]*[F(n)+1]$	D
0, 1, 1	$0 * 1 = 0$	$1^2 = 1$	$0 * 1 = 0$	0
1, 1, 2	$1 * 2 = 2$	$1^2 = 1$	$1 * 2 = 2$	-1
1, 2, 3	$1 * 3 = 3$	$2^2 = 4$	$1 * 3 = 3$	1
2, 3, 5	$2 * 5 = 10$	$3^2 = 9$	$2 * 4 = 8$	1
3, 5, 8	$3 * 8 = 24$	$5^2 = 25$	$4 * 6 = 24$	1

.....

34,55,89 34*89 = 3026 55^2 = 3025 54*56 = 3024 1

e così via all'infinito.

Abbiamo così la serie infinita dei quadrati $Q(n) = F(n)^2$ di Fibonacci, cioè i quadrati di tutti i termini della serie di Fibonacci, e per qualsiasi terna di Fibonacci ; abbiamo anche dei rettangoli R' di Fibonacci con lati i numeri esterni della terna, con la regola generale $R'(n) - Q(n) = \pm 1$ alternati all'infinito, mentre dalla terza terna 1,,2, 3 in poi abbiamo sempre, con i Rettangoli $R''(n)$, la differenza costante $Q(n) - R''(n) = 1$ (solo per le prime due terne tale differenza è rispettivamente 0 e -1).

La serie dei quadrati di Fibonacci è quindi :

1 1 4 9 25 64 169 441 ...

con rapporto $\approx \Phi^2 = 2,618...$ tra un termine qualsiasi e il precedente, per esempio $441/169 = 2,609... \approx 2,618 ...$

e con rapporto $\phi^2 = 0,618^2 = 0,3819...$, per esempio $169/441 = 0,3832 \approx 0,3819$ con sempre maggiore approssimazione al crescere di $Q(n)$, così come accade per la normale serie di Fibonacci e i numeri 1,618 e 0,618...., come già sappiamo.

Il paradosso di Fibonacci è ora più chiaro, con la novità che il quadrato di un numero qualsiasi di Fibonacci $F(n)$ differisce di

una sola unità dall'area del rettangolo avente per lati i numeri di Fibonacci esterni della terna con $F(n)$ centrale; e con l'altra novità del Rettangolo $R''(n)$ con lati $F(n)$ centrale ± 1 , e con differenza costante $1 = Q(n) - R''$ a partire dalla terza terna di numeri di Fibonacci (questo perché il prodotto di due numeri che differiscono di due unità è sempre uguale al quadrato del numero centrale diminuito di una unità, e questo non succede per le prime due terne poiché 0 e 1 , 1 e 2 non differiscono di due unità, ma di una sola unità, ecco perché fanno eccezione alla regola generale per $Q(n) - R''(n) = 1$.

Si cercano applicazioni pratiche di queste novità sui quadrati di Fibonacci, per esempio in fenomeni naturali o matematici, così come i numeri di Fibonacci sono coinvolti in vari fenomeni naturali che riguardano spirali logaritmiche (pigne, girasoli, conchiglie, ecc. o riproduzioni di animali, per es. conigli; o fenomeni matematici, come algoritmi per computer (Pentium) o finanziari (andamenti di titoli in borsa, ecc, tutti connessi alla serie di Fibonacci (vedi pagina "Lavori Di Noto" – sezione Fibonacci - sul nostro sito, con recenti lavori in merito); così come noi abbiamo elaborato il concetto di numeri primi naturali $P_n = 6f \pm 1$ con f serie di Fibonacci anziché $6n \pm 1$ come nei numeri primi aritmetici, con n serie dei numeri interi naturali; e con le loro connessioni con la Teoria di stringa trovate dal

Dott. Nardelli esposte in un lavoro comune (Teoria di stringa 3) sul sito collegato <http://xoomer.alice.it/stringtheory>

che riporta i nostri lavori su altre possibili connessioni tra numeri primi naturali e fenomeni naturali, per esempio l'emissione regolare di biofotoni da parte del corpo umano, ecc. ecc. .

Il tutto anche nell'ambito del programma Langlands, un tentativo di unificare molti risultati, recenti e passati, in Teoria dei numeri; "Il Programma Langland" ha molte analogie, più o meno evidenti, con la teoria quantistica dei campi" come scrive il Dott. Nardelli nel riassunto del suo articolo "L'acqua nel reame del vivente: connessioni con la Teoria delle stringhe e la Teoria dei numeri" già sul suddetto sito.

Ma, ritornando a Fibonacci, abbiamo anche trovato che la somma di due quadrati di Fibonacci $Q(n) + Q(n+1)$ successivi è anche il numero di Fibonacci $F(2n)$, ed esattamente la radice quadrata di $Q(2n-1)$:

$$Q(n) + Q(n+1) = \sqrt{Q(2n-1)}$$

Esempi : essendo la serie $Q(n) = 1, 1, 4, 9, 25, 64, 169 \dots$

Con $n = 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \dots$

$$1+1 = 2 = F(4)$$

$$1+4 = 5 = F(6)$$

$$\begin{aligned}
4+9 &=13 = F(8) \\
9+25 &=34 = F(10) \\
25+64 &=89 = F(12) \\
\dots & \quad \dots \quad \dots
\end{aligned}$$

Il prodotto di due quadrati di Fibonacci consecutivi, invece, abbiamo la serie $Q(n) * Q(n+1) = 1, 4, 36, 225, 1.600, 10.816\dots$

con n	1	2	3	4	5
-------	---	---	---	---	---

e con rapporto $r \approx \Phi^4 = 6,8535\dots$ tra un termine e il precedente, e $\phi^4 = 0,1458\dots$ tra un termine e il successivo; per esempio, $225/36 = 6.25$, $1.600 / 225 = 7,1111\dots$, $10.816/1.600 = 6.76$ e, viceversa, con rapporto $r' \approx \phi^4 = 0,1458\dots$, per esempio $1/4 = 0,25$, $4/36 = 0.1111$, $36/225 = 0,16$, $225/1.600 = 0,1406$, $1.600/10.816 = 0,1479$ e cioè con sempre maggiore approssimazione al crescere dei termini della serie, proprio come succede per la normale serie numerica di Fibonacci con Φ e ϕ .

Indicando ora con $q(n)$ la radice quadrata del prodotto tra due Quadrati consecutivi, troviamo che

$$\begin{aligned}
q(n) = \sqrt{Q} &= 1, \quad 2, \quad 6, \quad 15, \quad 40, \quad 104,\dots \\
\text{con } n' &= \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad \dots
\end{aligned}$$

con rapporto $r \approx \Phi^2 = 2,617\dots$ tra un termine e il precedente, ecc., e la formula generale:

$$q(n') = \sqrt{Q} = F(2n') + q(n'-2) \text{ con } n' \text{ della serie } Q$$

infatti, per esempio, $q(4) = 15 = F(8) + q(2) = 13 + 2$

$$q(5) = 40 = F(10) + q(3) = 34 + 6$$

$$q(6) = 104 = F(12) + q(4) = 89 + 15$$

... ..

Per prodotti Q' di due quadrati di Fibonacci alternati, abbiamo invece $Q'(n) = Q(n-1) * Q(n+1)$ e la serie:

$$1*4 = 4 = 2^2$$

$$1*9 = 9 = 3^2$$

$$4*25 = 100 = 10^2$$

$$9*64 = 576 = 24^2$$

$$25*169 = 4225 = 65^2$$

$$64*441 = 28224 = 168^2 \text{ e cos\`i via,}$$

che sono quadrati dei rettangoli di Fibonacci $R' = Q^2 \pm 1$,

e si ritorna cos\`i ai quadrati di Fibonacci $Q(n) = F(n)^2$

dai quali siamo partiti.

Ai matematici pi\`u volenterosi, ora, il piacere di dimostrare tutte queste novit\`a sulla serie di Fibonacci, ed eventualmente di seguire su questa strada con i cubi di Fibonacci, le quarte

**potenze di Fibonacci, ecc. ecc., perché si potrebbero scoprire
altre relazioni interessanti come quelle scoperte in questo lavoro
iniziale sui quadrati (e rettangoli) di Fibonacci e quindi, in
prospettiva, potenze $F(n)^k$ dei numeri di Fibonacci.**

A tutti, buon lavoro!

Gruppo ERATOSTENE

Caltanissetta 10.11.2009