PROGRESSIONI ARITMETICHE
DI NUMERI PRIMI (PAP1, PAP2, PAP DENSE)
E TEOREMI DI GREEN, TAO E GOLDSTON

Seconda parte

Gruppo Eratostene

In questa seconda parte del lavoro sulle progressioni aritmetiche di numeri primi, accenneremo ai teoremi di Green e Terence Tao, per concludere su alcune conseguenze del Teorema di Goldston , con i contributi di Yldirim e Printz, che viene chiamato in modo collettivo GYP; che useremo in questo lavoro, basato su materiale trovato sul Blog matematico internet del Prof. Umberto Cerruti.

Il teorema di Green e di Tao dice che:

" Esistono progressioni aritmetiche di primi di qualsiasi lunghezza".

Commento del Prof. Cerruti, dopo aver citato il lavoro di Green e Tao: The primes contain arbitrarily long arithmetic progression (2004 – 2005).

Si tratta di un conseguimento di enorme portata, sia per il risultato in se, sia per i metodi utilizzati, che aprono nuovi campi di ricerca.

Tra le più interessanti, vi sono le progressioni aritmetiche:

a, a + d, a + 2d, a + (k – 1) d…

Si riportano poi delle progressioni di numeri primi, per le quali rimandiamo al Blog; qui riportiamo solo, a titolo di esempio più interessante, la sequenza [2.3], "valore iniziale 47 , lunghezza 7, differenza 210 (=6*35, n.d.A.A.) :

47, 257, 467, 677, 877, 1.097, 1.307.

"La sequenza [2.3] colpisce l'attenzione perché è interamente composta da numeri primi. Esistono 96 sequenze formate da sette primi, con differenza 210 e valore iniziale minore di due milioni…" Come detto nella prima parte, le progressioni di k primi non consecutivi sono in genere un piccolo sottoinsieme della nostra progressione principale, che parte da +1 (che è di forma 6n +1 con n = 0, ma anche da -1 = 6*0 -1, e quindi "tecnicamente"anche + 1 e - 1 potrebbero essere considerati, sebbene banali, a differenza di numeri primi, come tutti quelli dai quali parte una PAP):

1 + 4 + 2 + 4 + 2 + 4 + 2 + 4 + 2…… all'infinito, che si può scrivere anche con passi successivi:

1+4 = 5
5+2 = 7
7+4 =11
11+2 =13
13+4 =17
17+2 =19
19+4 =23

23+2 =25 = 5*5 = numero composto
25+4 =29
29+2 =31
31+4=35=5*7 = numero composto
35+2=37
37+4=41
41+2=43
43+4=47
47+2=49=7*7 = numero composto
49+4=53
53+2=55= 5*11 = numero composto
… … …

e cosi si torna alle forme 6n $\pm$ 1 : i successivi termini saltano tutti ii multipli di 3, ma coincidono con tutti gli infiniti numeri primi maggiori di 3 e dei loro prodotti e potenze senza fattori 2 e 3. Tali prodotti o potenze sono detti "pseudo - primi" ma in modo consecutivo, e con distanze o differenze , tra un termine e l'altro (anche non consecutivo) di forma 6n, oppure 6n + 2, il chè copre tutti i numeri pari. Le PAP1 di Tao (per distinguerle dalle PAP2 oggetto del Teorema GYP e della nostra spiegazione) invece, sono fatte di numeri primi non consecutivi, ma con distanze costanti sempre di forma d = 6n, e cioè multipli di 6, poiché essi sono tutti della stessa forma 6n -1 oppure 6n + 1. E quindi stanno sulla stessa colonna, e così saltano qualche numero primo che si trova nell'altra colonna.

In altre parole le PAP2 di numeri consecutivi non hanno distanza costante, e viceversa, le PAP1 di Tao hanno distanza costante d = 6n ma i suoi numeri

primi non sono consecutivi.

Ne consegue che se ad un qualsiasi numero primo, che può essere anche -1 oppure +1, si aggiunge (o si sottrae, ottenendo così numeri primi col segno negativo, per es. 5 – 36 = - 31) un numero di forma 6n più volte, si ottengono le PAP1 di Tao, più o meno lunghe, ma con numeri primi non consecutivi, che saltano qualche composto ma anche qualche primo; però mantengono tutte la distanza costante d = 6n. Ecco perché possono essere più lunghe delle PAP2 di soli primi consecutivi nella stessa colonna, che hanno al massimo quattro primi , tranne la PAP iniziale 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 di nove elementi, o di sette elementi se si escludono il 2 e il 3 iniziali (che non sono di forma 6n + 1) ; tutte le PAP2 successive con numeri primi consecutivi hanno al massimo quattro numeri primi, poiché ogni 5 + 1 numeri c'è un multiplo di 5 che interrompe la PAP1, ogni 7 + 1 numeri c'è un multiplo di 7, e cosi via, e tali PAP diventano sempre più rare al crescere dei numeri primi.

Tornando alla PAP1 che inizia con 47, la differenza costante è 210 = 6n = 6*35, per i motivi già detti in base alle forme 6n $\pm$ 1 ; e tutti i sette numeri primi che la compongono sono di uguale forma, in questo caso 6n-1, infatti 47 = 6*8 - 1, 257 = 6*43 -1, 467 = 6*78 – 1, … . 1307 = 6*218 -1. Da notare che 35 è la distanza costante tra i successivi n, per esempio 43 – 8 = 35, 78 – 43 = 35, e 35 è

il valore di n per la differenza costante 210 = 6*35.

"La PAP1 più lunga è di 23 elementi, e parte dal numero primo 56.211.383.760.397, con differenza costante uguale a 44.546.738.095.860 = 6n , e finisce con il numero primo 103.623.962.186.937, e tutti sono della stessa forma aritmetica (cosa che si può controllare con un computer ad almeno 14 cifre). "Il precedente record era di lunghezza 22 cifre".

"Le differenze hanno qualcosa in comune?" si chiede il Prof. Cerruti. Noi abbiamo dimostrato, nella prima parte, che tale differenza deve essere un multiplo di 6, e quindi d = 6n, come si può benissimo verificare con tutte le differenze delle PAP riportate, e che tutti i suoi numeri primi sono della stessa forma aritmetica, come già abbiamo visto per la PAP1 [2.3] ; queste sono, quindi, le cose comuni e più importanti tutte le possibili e infinite PAP1 di numeri primi non consecutivi, oltre al fatto che i vari n di tutti i numeri primi sono multipli del valore di n della differenza costante (come abbiamo visto per n = 35 di 210 = 6*35). In pratica, già sono tre cose in comune, che in seguito potranno sicuramente essere utilissime per uno studio più approfondito delle PAP in particolare e dei numeri primi in generale. Seguono, nell'esposizione del Teorema di Green e Tao, altri esempi e teoremi minori, che coinvolgono i numeri primoriali come differenze minime di tutte le serie di PAP1; e i numeri

primoriali p # = 2*3*5*7*…*p (prodotti di numeri primi successivi fino a p)

sono tutti divisibili per 6, essendo 6 il prodotto dei primi duenumeri primi 2 e 3; questo conferma la differenza d = 6n in base alle forme 6n $\pm$ 1, e anche perché

un primoriale (e anche un fattoriale) + 1 può essere un numero primo: perché

rispetta la formula generale 6n + 1, poiché c'è il 6 =2*3 iniziale, c'è n (il

prodotto di tutti gli altri fattori primi successivi), e il +1 finale.

I numeri primoriali successivi legati alle PAP1 sono: 2, 6, 30, 210, 2310,

30.030… che, tranne il 2 iniziale, sono tutti multipli di 6, con i rispettivi n a

partire da 210, tutti multipli di 35. Infatti 210/6 = 35, 2310/6 = 385 = 11*35,

30.030/6 = 5.005 = 143 = 11*13, quindi n legato ai numeri 11 e 35 =7*5, per

motivi sicuramente legati ai primoriali, essendo 5, 7, 11 e 13 i primi numeri

primi. Trascurati ora i teoremi minori, per i quali rimando al Blog del Prof.

Cerruti, vediamo ora eventuali e possibili importanti relazioni con il teorema

collettivo GYP, pure esposto nello stesso Blog, e che riguarda la distanza media

log p_n tra due primi consecutivi; o meglio con qualcuno dei suoi aspetti (per

esempio circa l'esistenza di intervalli numerici più o meno densi di numeri primi).

Noi qui accenneremo alle distanze reali variabili tra numeri primi

consecutivi (ed abbiamo chiamate PAP2 le relative progressioni aritmetiche di

numeri primi, per distinguerle dalle PAP1 di Tao, che invece hanno distanze

costanti ma numeri primi non consecutivi) in un intervallo numerico di una certa lunghezza più denso di numeri primi (PAP dense), preceduto o seguito da un intervallo numerico della stessa lunghezza, ma meno denso di numeri primi.

Prendiamo l'esempio da un commento al teorema di Goldston su Internet. L'Autore sembra chiedersi perché, per esempio, i quattro numeri primi 821, 823, 827 e 829 sono compresi in sole otto unità (829 – 821 = 8, differenza tra l'ultimo numero e il primo), mentre i precedenti numeri 773, 787, 797 e 809 sono invece diluiti in 36 unità (809 – 773 = 36). Consideriamo ora queste due piccole serie di numeri, e vediamo che essi sono consecutivi, e quindi sono piccoli sottoinsiemi (o piccole PAP2) della nostra progressione di base 1+4+2+4+2+4+2+…all'infinito, e come tale la differenza d o distanza tra i suoi termini non è costante, come tutte le PAP2, e quindi con numeri primi consecutivi :

…821 + 2 + 4 + 2+ …..

e quindi 821 + 2 = 823

823 + 4 = 827

827 + 2 = 829.

Ora abbiamo tutta la piccola PAP2 in esame. Poiché ci sono due d = 2, ciò

significa che ci sono due coppie di gemelli: 821 e 823 la prima coppia, e 827 e 829 la seconda coppia, separate tra loro da una piccola differenza d = 4, poiché 827 – 823 =4.

Qui ricordiamo brevemente che la frequenza media delle coppie di gemelli è circa il quadrato della frequenza locale media dei numeri primi, che per numeri prossimi a 1.000 è di circa 6 (cioè mediamente un numero primo ogni sei unità) e quindi 6^2 = 6*6 = 36: una coppia di gemelli, mediamente, ogni 36 unità. In questo caso si ha però una coppia di gemelli dopo appena 4 unità, cosa rara ma che determina la maggiore densità di 6 numeri primi nella PAP2 considerata.

Piccole differenze, possibili solo nelle coppie di gemelli (d=2) e d=4, d=6, ecc. tra i numeri primi più vicini alle coppie di gemelli, infatti comportano ovviamente una maggiore densità di numeri primi in qualsiasi intervallo numerico, a differenza di un altro intervallo numerico vicino di uguale lunghezza ma con differenze maggiori tra i numeri primi consecutivi in esso compresi, e di conseguenza meno denso di numeri primi, o, in altre parole, più "rarefatto"

Nella PAP2 di cui sopra, essendoci ben due coppie di gemelli e una piccola differenza d = 4, è ora più chiaro come essa è più densa della piccola PAP2

precedente 773, 787, 797 e 809, che al contrario, non contiene coppie di gemelli ma differenze successive d =14, d = 10, e d = 12 (qui gli intervalli non sono di uguale lunghezza aritmetica, perché sono considerati invece PAP2 di uguale lunghezza l = 4, cioè di quattro numeri primi ciascuna, (per lunghezza qui si intende il numero di numeri primi costituenti la PAP2).

Ora vedremo invece intervalli di uguale lunghezza in termini di unità, ma con diverso numero di numeri primi in ognuno di essi). Ecco perché, in ogni caso, nella PAP2 considerata ci sono quattro numeri primi in sole 8 unità, mentre nell'altra quattro numeri primi sono diluiti in ben 36 unità di differenza tra il primo e l'ultimo (809-773=36), con differenze d = 14, 10 e 12 mentre come abbiamo visto, nella PAP2 più densa le differenze sono d = 2, 4 e 2, essendo in presenza di due coppie di gemelli e di una piccola differenza d =4 tra di loro. Quindi è ora del tutto chiaro che è proprio la presenza di una o più coppie di gemelli, ed una possibile piccola differenza tra le due (o più) coppie di gemelli, a determinare una maggiore densità di numeri primi in una qualsiasi PAP2 densa, rispetto ad una PAP2 vicina ma meno densa.

Due altri esempi di rare PAP2 per numeri primi più grandi, ma distribuiti ora in due intervalli di uguale lunghezza numerica, è quello relativo ai nove numeri primi compresi nell'intervallo di cento unità tra 9.000.900 e

10.000.000, e di due soli numeri primi nel successivo intervallo tra 10.000.000 e 10.000.100: anche qui, come vedremo ci sono due coppie di gemelli relativamente ravvicinate, e piccole differenze tra gli altri numeri primi; mentre nel secondo intervallo, pur essendo anch'esso di cento unità, ci sono soli due numeri primi, molto distanziati tra loro (d =60) e anche dai loro numeri primi vicini, fuori dall'intervallo di cento unità.

Numeri primi presenti nel:

Primo intervallo Secondo intervallo

-- -------------------------

9.999.901 10.000.019 d=28

9.999.907 differenza d = 6 col precedente

9.999.929 gemello del successivo 10.000.079 d=60

9.999.931 gemello del precedente col precedente

(10.000.103 fuori intervallo d=24col precedente)

9.999.937 differenza d = 6 col precedente.

9.999.943 differenza d=10 col precedente.

9.999.971 differenza d= 28 col precedente.

e gemello del successivo

9.999.973 gemello del precedente

9.999.991 differenza d=18 col precedente.

Quindi anche qui ben due coppie ravvicinate di gemelli nella prima PAP2 e piccole differenze tra gli altri numeri primi consecutivi vicini; e, viceversa, nessuna coppia di gemelli nella seconda PAP2, con distanze più grandi (28, 60 e 24) tra i due soli numeri primi e tra il maggiore di essi e il successivo 10.000.103, che ricade già fuori dal secondo intervallo di cento unità, e quindi non può far parte della seconda PAP2, più rarefatta della prima; ma la successiva distanza d=24 ,sebbene non inerente all'intervallo considerato, contribuisce anch'essa a tale rarefazione, non essendoci più numeri primi tra 10.000.079 e la fine dell'intervallo, che è 10.000.100.

Anche qui, quindi, la presenza di due coppie di gemelli (con distanza locale 40 invece della media locale 15*15= 225, cioè una coppia di gemelli ogni 225 unità come media statistica) e le piccole differenze tra gli altri numeri primi, sono la causa della maggiore densità nella prima PAP2 (nove primi contro i due della seconda, pur essendo gli intervalli di 100 unità ciascuno.

Il chè ci permette ora di capire meglio il Teorema GYP, o meglio una delle sue conseguenze (PAP2 più dense di quelle adiacenti in intervalli di uguale lunghezza). Poiché le coppie di gemelli sono infinite; la retta numerica è un successivo ripetersi, e alternarsi, all'infinito, di PAP2 più o meno dense rispetto alle precedenti o alle successive; e rendendo possibili, e ora ben più

comprensibili, gli strani "grappoli" di numeri primi che si trovano ciclicamente: se si va a guardare bene nel loro interno, si scoprono una o più coppie di gemelli, che da sole rendono più fitto il "grappolo" al quale appartengono, come nella PAP2 di nove numeri primi nell'intervallo considerato; e che, statisticamente, dovrebbe comprendere mediamente solo sei numeri primi (intervallo diviso per la frequenza locale 100/15 = 6,66), e cosi pure il secondo intervallo, che però ne comprende solo due anziché sei; ma la somma dei due intervalli (200 unità) contiene 9+2= 11 numeri primi reali, anziché 200/15 = 13,3 ≈ 13 come da media statistica.

Quindi, allungando l'intervallo, la presenza statistica di numeri primi tende a normalizzarsi rapidamente. Il Teorema GYP si è basato sui piccoli intervalli più densi per le sue conclusioni statistiche (infinità delle coppie di gemelli ecc.), trascurando gli intervalli, e quindi le relative PAP2 meno dense, che però esistono al pari di quelle più dense, e ora anch'esse sono più comprensibili insieme a tutto il meccanismo matematico coinvolto; e che è basato sulle forme 6n $\underline{+}$ 1 e sulle loro conseguenze unificanti sulle PAP2 e sulle PAP1 di Green e Tao. In questo meccanismo potrebbe essere coinvolte anche le nostra soluzione positive della congettura di Goldbach e dei numeri primi gemelli (le coppie di gemelli sono sempre l'ultima coppia di Goldbach per certi numeri pari) e

anche la congettura di Polignac, (numeri pari come infinite volte la differenza di numeri primi consecutivi sempre più grandi, con una coppia di primi con differenza 2n come ultima coppia di Goldbach per numeri pari N molto grandi).

E' questa una possibilità che forse tratteremo in futuro, una volta però dimostrate meglio, da noi o da altri matematici, le suddette congetture. La loro correlazione matematica profonda ora appena intravista con la connessione: Forme 6n $\pm$ 1 – PAP1 (Teorema di Green e Tao) – PAP2 (Teorema GYP – Congetture di Goldbach – gemelli – Polignac) potrebbe infine essere molto utile a comprendere meglio la distribuzione dei numeri primi, e, in lontana prospettiva, anche l'ipotesi di Riemann, che riguarda proprio la distribuzione dei numeri primi, sebbene non ancora definitivamente dimostrata (viene presa presuntivamente per vera in molti teoremi, circa un centinaio, che cominciano pressappoco con "se l'ipotesi di Riemann fosse vera…").

Con questo lavoro, se le nostre soluzioni positive su Goldbach e primi gemelli fossero esatte (GYP conferma già l'infinità dei numeri primi gemelli) saremmo già arrivati a buon punto.

GRUPPO ERATOSTENE

(F. Di Noto – G. Di Maria – M. Nardelli -- A.R. Tulumello)

Caltanissetta 1.9.2010 (data di revisione)