Il Problema di Basilea
(proposta di soluzione per N dispari)

In questo lavoro parleremo delle nostre osservazioni e dei calcoli connessi sul problema di Basilea, connesso alla funzione zeta di Riemann e quindi anche alla RH.
Da pag. 79 del libro di Derbyshire "L'ossessione dei numeri primi":

"Si noti che la serie

$$\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} \right.$$, N.d.A.A.) .

studiata dal problema di Basilea (La chiamerò << serie di Basilea >>) non è molto diversa dalla serie armonica,collegata alla RH tramite la funzione zeta $\zeta(s)$.

Ogni termine, è, infatti, il quadrato del temine corrispondente nella serie armonica. La somma a 10 000 termini differisce solo dello 0,06 per cento della somma infinita, che è 1,6449340668…

Quello era il problema di Basilea: trovare una forma chiusa per la serie dei quadrati reciproci. Il problema venne infine risolto nel 1735, quarantasei anni dopo il suo enunciato,dal giovane Eulero, che lavorava duramente a San Pietroburgo.

La stupefacente risposta era $\frac{\pi^2}{6}$. Il problema di Basilea apre le porte alla funzione zeta, l'oggetto matematico tirato in ballo dall'ipotesi di Riemann. Infatti

$$\zeta(s) = \frac{1}{1 - p^{-s}}$$

dove s è un esponente complesso, mentre nella serie di Basilea l’esponente è l’intero positivo 2 . Ma può essere anche N maggiore di 2, e allora abbiamo la seguente tabella, con la serie che converge a $\frac{\pi^2}{6}$ per N = 2 , a $\frac{\pi^4}{90}$ per N = 4, a $\frac{\pi^6}{945}$ per N = 6, valori che, messi nella seguente tabella, sono i seguenti:

TABELLA 1

N	Valori dell’espressione 5.1	Nostre osservazioni
1	Indefinita	(circa 2,718, N.d.A.A.)
2	1,644934066848	(circa √2,718, “)
3	1,202056903159	
4	1,082323233711	
5	1,036927755143	
6	1,017343061984 “	

Noi abbiamo però notato, dopo qualche breve calcolo, che il valore per N=3, e cioè 1,2020… è circa la media aritmetica tra √1,6449… = 1,2825…e √1,2825… = 1,1324…, infatti il valore per N = 3 è di

$$\frac{1,2825 + 1,1324}{2} = \frac{2,4149}{2} = 1,20745$$

valore molto prossimo al valore reale 1,2020…per N = 3

Invece il valore approssimato per N = 4 è dato direttamente da circa √1,202056… = 1,0963…, molto vicino al valore reale 1,0823…(per maggiore semplicità ci limitiamo alle sole prime quattro cifre decimali).

Il valore per N = 5, è, in modo analogo (Radice quadrata del valore precedente o della media di due valori indiretti precedenti) molto vicino a circa √1,0823 = 1,04033…con soli circa quattro millesimi di differenza (040 - 036 = 4) dal valore reale 1,0369. E così pure il valore per N = 6, 1, 01734…, è molto vicino a √1,0369… = 1,01829.. con circa solo un millesimo di differenza. Forse tale relazione tra un qualsiasi valore, corrispondente a circa la radice quadrata del precedente (relazione che abbiamo riscontrato in altre funzioni,e abbiamo esposto con analoghe tabelle), oppure talvolta, come in questo caso, anche con una media, tra radice quadrata e radice quarta di un rapporto precedente, per es. per N = 3), potrebbe essere in futuro molto utile (almeno così speriamo) per qualche dimostrazione relativa alla funzione zeta e quindi direttamente della RH, o a qualche altra funzione e quindi indirettamente, con una delle ipotesi RH equivalenti. La suddetta relazione è stata da noi trovata per la funzione $\pi(n)$ e per la funzione $\Theta(n)$, dove però un rapporto è circa la radice quarta del precedente, oltre che per il problema di Basilea.

Capovolgendo la tabella 2 e facendola seguire dalla Tabella 1, otteniamo in successione le radici quadrate successive di 2, 705 ≈ ***e*** = 2,718… , e la nostra osservazione risulterà più chiara:

valori di $\boldsymbol{e}^{\mathbf{n}}$ della TABELLA 2 capovolta (valori centrali):

n	$2{,}705^{\mathbf{n}}$	≈ $\mathbf{2{,}718}^{\mathbf{n}}$		***num. Fibonacci***
				↓
5	144,8226…	≈ 148,3362…	≈ $2{,}705^{\mathbf{5}}$	≈ ***144***
4	53,5388…	≈ 54,5755…	≈ $2{,}705^{\mathbf{4}}$	≈ ***55***
3	19,7925…	≈ 20,0792…	≈ $2{,}705^{\mathbf{3}}$	≈ ***21***
2	7,3170…	≈ 7,3875 …	≈ $2{,}705^{\mathbf{2}}$	≈ ***8***
				≈ ***3***
1	2,705	≈ 2,718 = ***e***	**seguono i valori TABELLA 1**	

(valori del problema di Basilea)

$\sqrt{2{,}705}$ ≈ 1,6449 … ≈ $\sqrt{\boldsymbol{e}}$ = 1,6486 (N=2)

$\dfrac{\sqrt[4]{e}+\sqrt[8]{e}}{2}$ ≈ 1,2020… ≈ **media tra 1,2839 e 1,1331 = 1,2085**

$\sqrt[16]{\boldsymbol{e}}$ ≈ 1,0823… (N=4)

$\sqrt[32]{e} \approx$ 1,0369…

$\sqrt[64]{e} \approx$ 1,0173… (N=6)

…. ….

Con l'unificazione dei valori della TABELLA 2 e della TABELLA 1 ci si rende meglio conto del legame tra il numero ***e*** =2,718 e il problema di Basilea, e quindi della sospetta connessione tra ***e*** ed π = 3,14, poiché i valori di Basilea per N pari sono uguali a $\frac{\pi^2}{6}$, $\frac{\pi^4}{90}$, $\frac{\pi^6}{945}$

Per N dispari (per i quali il problema di Basilea non è stato ancora risolto, non ancora risolto - ma di seguito proponiamo una nostra proposta di soluzione) , i relativi valori potrebbero essere una media tra i suddetti valori per N pari, e cioè, per N = 3, dalla media dei valori per N = 2 e N = 4 , tenendo conto che di 1,6449 occorre usare la √ :

$$\frac{\sqrt{1{,}6449} + 1{,}0823}{2} = \frac{1{,}2825 + 1{,}0823}{2} = \frac{2{,}3648}{2} = 1{,}1824$$

vicino a 1,2020 per N = 3 (solo circa un centesimo di differenza; e per N = 5:

$$\frac{1{,}0823 + 1{,}0173}{2} = 1{,}0498 \approx 1{,}0369\ldots$$

ottenendo valori molto simili a quelli reali:

per N = 3 abbiamo 1,1824… ≈ 1,2020…
e per N = 5 abbiamo 1,0498 …≈ 1,0369…

quindi la suddetta media dei valori sembra funzionare, e potrebbe essere ulteriormente migliorata per connettere meglio il numero π = 3,14 anche ai valori per N dispari, risolvendo cosi definitivamente il problema di Basilea .
Le medie di cui sopra possono quindi scriversi anche come:

$$\frac{\sqrt{\frac{\pi^2}{6}} + \frac{\pi^4}{90}}{2} = 1{,}1824 \approx 1{,}2020 \quad \text{valore per } N = 3$$

$$\left(\frac{1{,}282549829 + 1{,}82323290}{2} = 1{,}182436529 \approx 1{,}2020\ldots\right)$$

$$\frac{\frac{\pi^4}{90} + \frac{\pi^6}{945}}{2} = \mathbf{1{,}049833142 \approx 1{,}036927755143 \quad per \quad N = 5}$$

Valori medi approssimati per eccesso (per difetto invece il primo) rispetto ai valori reali, con una differenza, per il secondo, di circa soli tredici millesimi (13 = 49 – 36), e di circa due decimi per il primo, usando il valore di π = 3,14159265.

La media aritmetica di due funzioni chiuse dovrebbe essere anch’essa una funzione chiusa, e se così fosse il problema di Basilea sarebbe almeno parzialmente risolto; anche se i valori per tali medie,valide per N dispari, non sono esattamente quelli della Tabella 1, ma molto vicini, il chè dovrà pure significare qualcosa, anche se non sappiamo ancora bene che cosa.

Per questo problema (risolto per i numeri N pari ma non ancora per quelli dispari, per i quali noi proponiamo la suddetta soluzione tramite medie aritmetiche) come accennato nella tabella (nostre osservazioni), abbiamo quindi capito che il valore per N = 2, e cioè 1,644934066848, è circa la radice quadrata del numero "***e***" = 2,718, e quindi

$$1,644934066848 \approx \sqrt{2,718\ldots} = 1,6486358 ,$$

con una differenza di circa 37 decimillesimi dal valore reale .

E, più esattamente, è la radice quadrata del numero 2,7058078, poiché $\sqrt{2,7058078} = 1,6449339$, con un solo decimilionesimo di differenza. Resta da capire la relazione tra e = 2,718 e 2,705, che differiscono tra loro di circa un centesimo, o, più precisamente, di 13 millesimi = 2,718 – 2,705.

Osserviamo anche che le potenze del numero ***e*** = 2, 718 sono (e questo verrà subito dopo collegato ai logaritmi di potenze 3N di 10 - molto vicine ai primi numeri di Fibonacci – connessi a alla funzione $\pi(10^{3N})$ - e quindi abbiamo la nuova più complessa connessione:

Probl. di Basilea – potenze di 2,718 – Fibonacci – π(10), in pratica tra i logaritmi naturali tramite "***e***", i numeri di Fibonacci tramite Φ e la funzione conteggio π(n), e il numero 2 tramite le sue potenze e radici. In breve, una connessione intravista tra gli importanti numeri:

1,618,	2,	2,705,	2,718,	3,14.
Φ		num. di Basilea	***e***	**π**

(chiamiamo numero di Basilea 2,705 essendo il quadrato del valore 1,64934066848 per N = 1)

TABELLA 2

Tabella delle potenze di "***e***" e delle suddette connessioni

N	e^N	≈	ln 10^{kN}	≈ numeri di Fibonacci (o loro medie aritmetiche)
1	2,7182	2,3025 ≈	ln 10^1	***3***
2	**7,38**	**13,8155 =**	**ln 10^6**	**13**
3	20,0837	20,7232 =	ln 10^9	21
4	54,5915	55,2620 =	ln 10^{24}	55

5	148,3908	149,6680 = $\ln 10^{65}$	144

Con k = 1, 3 , 13… (e con 1, 3 e 13 anch’essi numeri di Fibonacci…)

Cosa già vista nelle tabelle unificate

Riguardo ai primi numeri di Fibonacci, essi sono alternati, infatti mancano ***l’1, il 2, il 5, il 34 e l’89.***

Il collegamento coi i numeri di Fibonacci è dovuto al fatto che le potenze di Φ = 1,618 sono anche molto vicine a potenze di 2, 718 se l’esponente è pari, o ad una loro media se invece l’esponente è dispari, ed ecco perchè nella precedente tabella saltano i numeri di Fibonacci ***2, 5, 34 e 89 (sottolineati):***

$\mathbf{\Phi^N} \quad \mathbf{= \Phi^N} \quad \mathbf{\approx} \quad \boldsymbol{e^N} \qquad\qquad \mathbf{\approx}$ **num.Fibonacci**

$1{,}618^{1} = 1{,}618 \approx 2{,}718^{1/2} \approx \sqrt{2{,}718} \approx$ ***2***

$1{,}618^{2} = 2{,}617 \approx 2{,}718^{1} \approx$ ***3***

$1{,}618^{3} = 4{,}2358 \approx (2{,}617 + 6{,}8535)/2 = 4{,}73525 \approx$ ***5***

$1{,}618^{4} = 6{,}8535 \approx 2{,}718^{2} = 7{,}387 \approx$ ***8***

$1{,}618^{5} = (6{,}85365 + 17{,}9420)/2 = 12{,}39775 \approx$ ***13***

$1{,}618^{6} = 17{,}9420 \approx 2{,}718^{3} = 20{,}0792 \approx$ ***21***

$1,618^{7} = 29,0301 \approx 2,718^{3,5} = 33,1034 \approx$ ***<u>34</u>***

$1,618^{8} = 46,9708 \approx 2,718^{4} = 54,5755 \approx$ ***55***

$1,618^{9} = 75,9987 \approx 2,718^{4,5} = 89,9751 \approx$ ***<u>89</u>***

$1,618^{10} = 122,9660 \approx 2,718^{5} = 148,3362 \approx$ ***144***

… … … … …

Ed ecco che qui saltano fuori, con le potenze dispari di 1,618, i numeri di Fibonacci ***2, 5, 13, 34 e 89*** assenti nelle potenze intere di 2,718; e questo potrebbe anche avere a che fare con il problema di Basilea, dove la somma infinita con N pari è quasi sempre circa una radice 2^{n} - esima di 2,718 a partire da 1,2020… , (ma anche di 2,705 ≈ 2,718)

$\sqrt{1,202056903159} = 1,096\ldots \approx 1,0\,8223\ldots$ per N = 4

$\sqrt[4]{1,2020\ldots} = 1,047\ldots \approx 1,0369\ldots$ per N = 5

$\sqrt[8]{1,2020\ldots} = 1,02327\ldots \approx 1,01734\ldots$ per N = 6

Possiamo ora prevedere che per N = 7, avremo circa

$\sqrt[16]{1,2020\ldots} = 1,01156\ldots \approx$ valore reale della somma infinita per N = 7 circa il problema di Basilea, per il quale per N pari (come le radici di 1,2020…) il valore della somma infinita dipende da π =3,14, mentre per N dispari il problema non è ancora risolto (non si sono ancora trovate forme chiuse come $\frac{\pi^2}{90}$, ecc., noi proponiamo la soluzione delle medie sopra esposta) . Queste nostre osservazioni (sulla dipendenza dei valori dalle radici del numero e = 2,718 molto vicino al numero di Basilea 2,705) potrebbero essere utili in futuro per risolvere questo problema delle forme chiuse per N dispari. Ma osservando le successive radici

2^n- esime dello stesso π = 3,14 vediamo che esse sono, in successione:

1,7720…	(di poco superiore a 1,6449..)	per N = 2
1,3311…	≈1,2020…	per N =3
1,1153…	≈ 1,0823…	per N = 4
Media aritm. tra 1,3311 e 1,1153 = 1,2232…		**per N = 3**
1,0741..	già vicino a 1,0823...	per N = 4
Media aritm. tra 1,1153 e 1,01741… = 1,0947…		**per N = 4**
1,03640…	già vicinissimo a 1,0369…	per N = 5
1,01834 …	già vicinissimo a 1,01734…	per N = 6
1,0091....	vicino a 1,01156 prima stimato	per N = 7

con $\sqrt[16]{1{,}2020\ldots}$ = 1,01156… quindi i valori per N successivi possono essere più vicini a radici 2^n - esime di π, oltre a quelli derivati dalle considerazioni sulla relazione:

$\Phi^{N} \approx e^{N/2}$ risultante dalle precedenti tabelle, e quindi :

$1,618^{N} \approx 2,718^{N/2}$, che lega le potenze di Φ a quelle di *e*, connesse a loro volta con i numeri di Fibonacci, vicinissimi a queste potenze, come abbiamo già visto (potenze dispari di Φ e potenze pari di ***e*);** e anche la funzione conteggio π(n) ed in

particolare per $n = 10^{3N}$. Cosicché nel problema di Basilea (connesso con la funzione zeta, dove però N è un numero complesso) non è solo coinvolto direttamente il numero π = 3,14 (con le somme infinite chiuse), ma indirettamente, ricordiamo, anche il numero ***e*** = 2,718, il numero Φ =1,618, e la funzione conteggio π(n), connessa alla RH3. Ma ci potrebbe essere qualche relazione simile ma un pò più vaga e quindi anche un pò meno regolare anche tra le potenze di π e i numeri di Fibonacci (e quindi con le potenze dispari di Φ e le potenze pari di ***e***) :

potenze intere di $\pi = 3,14$

$3,14^{1} = 3,14 \approx \boldsymbol{3}$

$3,14^{2} = 9,85 \approx \boldsymbol{8}$

$3,14^{3} = 30,95 \approx \boldsymbol{34}$

$3,14^{4} = 97,21 \approx \boldsymbol{89}$

$3,14^{5} = 305,24 \approx$ media (***233*** + ***377***) / 2 = 305

$3,14^{6} = 958,46 =$ ***987***

… **…** **…**

con alcuni numeri di Fibonacci saltati **(**2, 5, 13, 21, 55, 144, 233, 377, 610), che però si possono parzialmente recuperare con le potenze semi - intere di 3,14:

$3,14^{0,5} = 1,77 \approx \underline{\mathbf{2}}$

$3,14^{1,5} = 5,56 \approx \underline{\mathbf{5}}$

$3,14^{2,5} = 17,47 \approx \underline{\mathbf{21}}$

$3,14^{3,5} = 54,85 \approx \underline{\mathbf{55}}$

$3,14^{4,5} = 172,25 \approx$ (circa media $\frac{\boldsymbol{144} + \boldsymbol{233}}{2} = 188,5$

$3{,}14^{5{,}5} = 540{,}89 \approx$ (circa media $\frac{\mathbf{377} + \mathbf{610}}{2} = 493{,}5$

… … … …

(rimangono fuori l' ***1*** e il ***13***, quest'ultimo come media tra ***5*** e ***21***, $\frac{\mathbf{5+21}}{2} = \frac{26}{2} = \mathbf{13}$, e anche come media $\frac{5{,}56 + 17{,}47}{2} = 11{,}515 \approx \mathbf{13}$)

Tutto ciò può servire benissimo a comprendere ancora meglio il problema di Basilea, i cui valori sono molto vicini a radici quadrate successive di 2,705 ≈ 2,718 e quindi anche di sue potenze.
Ritornando al numero ***e*** **,** base dei logaritmi naturali, ricordiamo che essi sono connessi a ln (n) come prime stime di π(n), stime poi perfezionate con altre formule, specialmente con i logaritmi integrali Li(n), alla base del TNP conseguenza già dimostrata della RH, oltre che alla funzione scalino J(x) e alla ζ(s).

I numeri di Fibonacci (basati sul numero aureo Φ = 1,618, si affaccia anche, come abbiamo già accennato prima, anche sulla funzione conteggio $\pi(10^{\mathbf{3n}})$, come da seguente tabella

N	N/ π(N)	≈ ln (N) ≈	F numeri di Fibonacci
10^{3}	5,9524	6,9077	***5*** = F_3
10^{6}	12,7392	13,8155	***13*** = F_8
10^{9}	19,6665	20,7232	***21*** = F_9
10^{12}	26,5901	27,6310 ≈	27,5 = media (***21***+***34***)/2
10^{15}	33,5069	34,5387	***34*** = F_{10}
10^{18}	40,4204	41,4465 ≈	44,5 = media (***34***+***55***)/2
…	…	…	… …

Il rapporto reale N/π(N) è quindi molto vicino al logaritmo di N, e per $N = 10^{3n}$, sia il rapporto sia il logaritmo sono molto vicini ad un numero di Fibonacci o ad una media di due di loro consecutivi.

Notiamo anche che la differenza e il rapporto tra N e π(N) (e quindi per $N = 10^{3n}$) della precedente tabella si avvicinano sempre più, ed ogni valore del rapporto è circa la radice quadrata del precedente:
(per brevità ci limiteremo a sole due cifre decimali)

ln N	N/ π(N)	differenza;	rapporto		= √rapporto precedente
6,90	5,95	0,95	1,15		
13,81	12,73	1,08	1,084	≈ 1,072	= √1,15
20,72	19,66	1,06	1,053	≈ 1,041	= √1,084
27,63	26,59	1,04	1,039	≈ 1,026	= √1,053
34,53	33,50	1,03	1,037	≈ 1,0193	= √1,039
41,44	40,42	1,02	1,025	≈ 1,018	= √1,037
…	…	…	…	…	…

Questo anche perché i primi due valori tendono a coincidere al crescere di N, quindi la loro differenza tende a 0 e il loro rapporto tende a 1, e inoltre si verifica anche qui il fenomeno dei valori dei rapporti legati alle radici 2^n - esime del valore iniziale, in questo caso di 1,15, come valori approssimativi (minori o maggiori, in questo caso minori) dei valori reali. Il rapporto tendente a 1 conferma per questa via il TNP, che ricordiamo:

$$N / Li(N) \rightarrow 1$$

Nota . Circa il problema di Basilea per $\zeta(26)$, cioè il valore per N = 26, tale valore è dato da

$1\,315\,862\ \pi^{26}\ /\ 11\,094\,481\,976\,030\,578\,125.$
(Derbyshire, pag.92)

Con un rapido calcolo con π = 3,14159265, abbiamo ottenuto il valore

0,999999985192221203880088008210571 ≈ $\sqrt[2^{26}]{2,705}$ = 1,00000001482817410… anche questo molto prossimo a 1, mentre con 2,718 otteniamo il valore di 1,00000001489961, differente dal primo per soli sette miliardesimi.

Viceversa, $1,00000001482817\ldots^{2^{26}}$ ≈ 2,704999 ≈ 2,705
con 2^{26} = 67 108 864

e cosi pure, per esempio $\sqrt[64]{2,705}$ = 1,015 (valore più vicino a 1,01734, con 64 = 2^{6} e 6 = sesto posto nella Tabella 1; per cui al 26° posto (valore per N = 26) ci sarà

il valore ottenuto con ≈ $\sqrt[2^{26}]{2,705}$ ≈ 1,0000001482817…

sopra ottenuto, e molto vicino al valore reale per N = 26 che è prossimo a 0,9999999851…,ma che si avvicina maggiormente ad 1 usando molte più cifre decimali di π = 3,14159265 poiché questo numero dà un risultato approssimato per leggero difetto rispetto al valore reale, molto più vicino a 1; e che comunque dovrebbe essere di pochissimo superiore a 1 affinchè, se elevato a 67108864, dia per risultato circa 2,705 (un numero minore di 1 elevato ad un numero maggiore di 1 dà invece per risultato un numero ancora minore. Infatti 0,9999999851 elevato a 67108864 dà per risultato 0,3679…) Quindi questo è un punto ancora da chiarire bene successivamente con calcoli più accurati, poiché basterebbero pochi miliardesimi in più per passare dal valore minore di 1 ad un valore maggiore di 1, come sarebbe più logico per N = 26.