FORMA 6k' - 2, 6k' E 6k' + 2 DELLE POSSIBILI DIFFERENZE TRA DUE NUMERI PRIMI CONSECUTIVI
(q = 6n + 1 e p = 6m + 1 con k' = n – m)

Gruppo Eratostene

Abstract

In this work we connect the forms 6k' - 2, 6k', 6k' + 2 of differences between two consecutive prime numbers (increments, or gaps) and the general forms of prime numbers (except only 2 and 3); q = 6n + 1 , and p = 6m + 1 with q > p, and k' = n – m.

Leggendo l'articolo di **Pradeep Kumar, Plamen Ch. Ivanov e H. Eugene Stanley "Information Entropy and Correlations in Prime Numbers**" (reperibile su ArXiv:cond-mat/030311v4 [cond-mat.statmech] 8 Apr. 2003) circa le differenze successive tra due numeri primi consecutivi, abbiamo capito almeno in parte perché le differenze di forma 6k + 2 sono più frequenti delle differenze di forma 6k e di forma 6k - 2.
Tutti i **numeri primi**, tranne il 2 e il 3, (e i *semiprimi* = p x q con p > 3 e q > 3) sono di forma 6k + 1, come si vede nelle seguenti colonne numeriche, fino a 101 , con k = 17

k	6k - 1	6k	6k +1	differenza col numero primo precedente
1	**5**	6	**7**	7 – 5 = **2** = 6 x 0 + 2 = 2 = 6k' + 2
2	**11**	12	**13**	13 – 11 = **2** … … …
3	**17**	18	**19**	19 – 17 = **2**
4	**23**	24	*25*	29 – 23 = **6** = 6 x 1 = 6k'
5	**29**	30	**31**	31 - 29 = **2**
6	*35*	36	**37**	37 – 31 = **6**
7	**41**	42	**43**	41 – 37 = **4** = 6 x 1 - 2 = 6k'-2

8	**47**	48	*49*	47 – 43 = 4 “ “
9	**53**	54	*55*	53 - 47 = **6** = 6 x 1 = 6k’
10	**59**	60	**61**	61 – 59 = **2 … …** 6k’+2
11	*65*	66	**67**	67 - 61 = **6 =** 6 x 1
12	**71**	72	**73**	73 – 72 = **2 =** 6k’ + 2
13	*77*	78	**79**	79 – 73 = **6** = 6 x 1
14	**83**	84	*85*	83 - 79 = **4** = 6k’ - 2
15	**89**	90	*91*	89 – 83 = **6** = 6 x 1
16	*95*	96	**97**	**97 - 89 = 8 = 6k’ + 2**
17	**101**	102	**103**	103 - 101 = ***2*** = 6k’ + 2

… … … … … … … …

Possiamo notare che fino a 101 ci sono 13 numeri primi di forma 6k -1, e 12 numeri primi di forma 6k +1, quindi i numeri primi di forma 6k -1 sono un po’ più numerosi dei numeri primi di forma 6k +1 (cosa già notata da Eulero); e che i numeri primi gemelli hanno lo stesso k ma segno diverso, e così la loro differenza è sempre 2, perchè:
6k + 1 – (6k - 1) = 6k +1 - 6k +1 = 2 ;
e le differenze tra due numeri consecutivi successivi sono, nell’ordine:
2, 2, 2, 6, 2, 6, 4, 4, 6, 2, 6, 2, 6, 4, 6, 8, 2 con il 2 (forma 6k + 2 per k = 0) che si ripete sette volte , il 4 (forma 6k’ -2 = 6 (k’- 1) +4) si ripete tre volte e il 6 (forma 6k’) si ripete sei volte. In definitiva, la forma 6k’+2 si presenta 8 volte (sette volte il 2 e una volta l’ 8), la forma 6k’ si ripete sei volte, e la forma 6k’ – 2 si ripete tre volte (il 4)
Tale andamento si ripete più o meno uguale (le differenze di forma 6k’ - 2 aumentano, e le differenze di forma 6k’ (= 6, 12, 18, ecc.) invece diminuiscono, estendendo le tabelle fino a k molto più grandi, e confermando le conclusioni dei tre Autori: le forme 6k’+ 2 sono più numerose delle forme 6k’- 2 , e le forme 6k’ diventano le più rare .
Questo perchè perché i numeri primi sono su entrambe le colonne
su entrambe le colonne, e così le differenze di forma 6k’ si verificano solo per numeri primi consecutivi di una stessa colonna, per es. 37 e 31, 53 e 47, cioè quando tra questi due numeri primi consecutivi non ci sono numeri primi appartenenti all’altra colonna; e questo fatto diventa sempre più raro; ed ecco anche il perché della maggiore rarità di differenze di forma 6k’.
In genere, tutte le differenze sono di forma 6k’- 2, 6k’ e 6k’ + 2

perché i numeri primi (tranne il 2 e il 3) sono sempre di forma 6k-1 e 6k +1, dando luogo alle seguenti combinazioni possibili:

a) q = 6n - 1 e p = 6m - 1, appartengono quindi entrambi alla prima colonna (6k -1) :

6n - 1 –(6m - 1) = 6n - 1 – (6m - 1) = 6n - 1 - 6m + 1 = 6(n -m) = 6k'

Es. 59 – 29 = 30

6 x 10 – 1 - (6 * 5 - 1) = 6(10 - 5) - 1 +1= 6 * 5 = 30 = 6k'

b) q = 6n - 1 e p = 6m + 1, appartengono quindi a colonne diverse:

6n -1 – (6m + 1) = 6n – 1 – 6m - 1 = 6(n - m) - 2 = 6k' -2

Esempio 41 - 31 = 10

6 * 7 -1 - (6* 5 +1) = 6(7 - 5) - 1 - 1 = 6 * 2 - 2 = 10 = 6k' - 2

c) q = 6n +1 e p = 6m +1, appartengono entrambi alla seconda colonna (6k +1)

6n +1 - (6m + 1) = 6n + 1 – 6m - 1 = 6(n - m) = 6k' come nel caso b)

Esempio 43 - 19 = 24

6 * 7 +1 - (6 * 3 + 1) = 6 * (7 – 3) = 6 * 4 = 24 = 6k'

d) q = 6n +1 e p = 6m -1, appartenenti quindi a forme diverse come nel caso b, ma ora con q = 6n + 1 e p = 6m - 1:

6n +1 – (6m - 1) = 6n + 1 - 6m + 1 = 6n – m) + 2 = 6k' +2

Esempio per q = 97 = 6 * 16 + 1 (in seconda colonna) e p 89 = 6 * 15 - (in prima colonna) :

6 * 16 + 1 - (6 * 15 -1) = 6 * 16+1 - 6 * 15 +1 = 6 (16 - 15) + 2 = 6 * 1 + 2 = 8 ;

il caso d è il caso più comune poiché, come ha notato Eulero, i numeri primi preferiscono leggermente la forma 6k - 1, e quindi le differenze di tipo d) sono le più frequenti, al contrario dei casi a), b), e c), che danno rispettivamente differenze di forma 6k', 6k'- 2 e 6k' - 2.

Tali combinazioni si verificano ovviamente anche per le differenze di numeri primi anche non consecutivi (per es. 97 – 59 = 38 = 6 * 6 +2, essendo 97 nella seconda colonna e 59 nella prima colonna) che per il momento non ci interessano, qui ci interessano solo due numeri primi consecutivi. Ovviamente, le forme 6k – 2, 6k, 6k + 2 coprono tutti i numeri pari, anche il 2 = 6 * 0 +2 = 0 + 2 = 2 , e il 4 = 6 * 1 – 2 = 6 – 2 = 4, così come le forme 6k - 3, 6k + 3, 6k -1 e 6k + 1 coprono tutti i numeri dispari.

Circa la somma di due numeri primi consecutivi, e anche non consecutivi, invece, il discorso ci porta invece alla congettura di

Goldbach (Rif. 1, con i vari lavori pubblicati sull'argomento); ricordiamo solo che per N pari di forma 6k ci sono più coppie di Goldbach (circa il doppio) p e q tali che $p + q = N > 4$, rispetto a numeri pari di forma $N = 6k + 2$, e questo perchè la formazione di tali coppie dipende dai multipli dispari di 3 e dai numeri primi fino ad N/2 e da N/2 ad N.
La forma $N = 6k'$, che emerge raramente come differenza di due numeri primi consecutivi, presenta invece più G(N) coppie di Goldbach, ma valori più alti anche per la funzione $\sigma(n)$ somma dei divisori di n, e di conseguenza valori più bassi per la funzione $\varphi(n)$ di Eulero (numero dei coprimi con n), rispetto a numeri di forma 6k + 2; e quindi tale forma N = 6k è molto importante in teoria dei numeri , come abbiamo visto per le differenze di due numeri primi consecutivi, e accennato per la funzione G(N) di Goldbach, la funzione somma $\sigma(n)$ dei divisori e la funzione $\varphi(n)$; i valori di tali funzioni sono direttamente o indirettamente connesse ai fattori di 6k ($6k = 2 * 3 * k$), mentre le forme 6k + 2 hanno in comune solo il fattore 2, e le forme 6k + 3 hanno in comune solo il fattore ; mentre le forme 6k + 1 non hanno in comune né il 2 e nemmeno il 3, e quindi sono le sole che possono contenere i numeri primi (tranne il 2 e il 3) e i semiprimi, composti ma privi di fattori 2 e 3, come per es.
35 = 5 x 7, ***65*** = 5 x 13 , ***121*** = 11 x 11 ecc.
Infine, cosi come per le differenze tra numeri primi (consecutivi e non, per le quali $k' = n – m$) anche per le somme, $p + q = 6 (m + n)$, $6(m +n) -2$ e $6 (m+n) +2$ e quindi 6k', 6k' - 2 e 6k' + 2, dove ora $k' = n + m$.

Per il prodotto $N= p*q$ si trova invece che:

$N = 6 (pn + m = qm + n)$,

oppure $s = pn + m = qm + n$, con $s = (N+1) / 6$;

per esempio per N = 29083 = 127 * 229

s = 4847 m =21 n = 38

4847 = 127 * 38 + 21 = 229 * 21 + 38

29083 ≈ (6 * 21 +1) * 6 *38 +1) + 6(21+38) = 36 * 21 * 38 + 6 * 59 = 28728 + 354 +1 = 29083

Ma anche $(6n + 1) (6m + 1) = 36mn + 6n + 6m + 1$, prodotto che diventa interessante per i numeri primi gemelli p e q , per i quali n = m e quindi abbiamo il loro prodotto $p * q = 36m - 1$, come visto in altri

lavori (Rif. 1) .
Ma si può connettere anche il prodotto alla loro semisomma, e alla loro semidifferenza come abbiamo fatto in altri lavori (sulla congettura di Goldbach , ottenendo un nuovo metodo di fattorizzazione, in certi casi molto veloce (solo però quando p e q sono molto vicini tra loro), Rif 1.
Tutto ciò potrebbe, se meglio approfondito con ulteriori ricerche
e tenendo conto, come in questo lavoro, anche della forma generale
6k + 1 dei numeri primi (tranne 2 e 3) e dei semiprimi , contribuire a conoscere ancora meglio la distribuzione non casuale dei numeri primi; e così, quindi, con una migliore conoscenza di questa distribuzione, si potrebbe infine arrivare a dimostrare anche l'ipotesi di Riemann, basata proprio su una distribuzione non casuale dei numeri primi; e se la RH è vera, come molti matematici (noi compresi) pensano, il problema della fattorizzazione sta in P (diventa cioè un problema polinomiale, come tutti quelli che i computer possono risolvere efficientemente in tempo polinomiale).
Gruppo ERATOSTENE

NOTA 1

Possibile connessione con il filtro di Chebyshev.

Queste differenze tra numeri primi consecutivi potrebbero avere qualche connessione con il filtro di Chebyshev , a sua volta correlato al TNP (Teorema dei Numeri Primi), conseguenza dell'ipotesi di Riemann; e la "Riemann function" è citata a pag. 2 del lavoro "Information Entropy and Correlations in Prime Numbers" a proposito delle energie di un gas di bosoni indipendenti, con energie uguali ai logaritmo dei numeri primi consecutivi.
Citiamo un brano da pag. 141 del libro di John Derbyshire
"L'ossessione dei numeri primi" (Bollati Boringhieri):
"…Non posso lasciare Chebyshev senza almeno ricordare il suo famoso filtro (famoso almeno tra i teorici dei numeri, credo).
Se dividete un numero primo (diverso da 2) per 4, il resto deve essere 1 o 3.
Hanno qualche preferenza i numeri primi? Sì, ce l'hanno: fino a p = 101, ci sono 12 resti uguali a 1 e 13 resti uguali a 3 (proprio quanti i primi di forma 6k + 1 e di forma 6k - 1, N.d.A.A..). Fino a p = 1009, il conto dà 81 e 87. Fino a p = 10 007, si ha 609 e 620. Com'è ovvio, i resti uguali a 3 hanno un margine leggermente superiore rispetto ai resti uguali a 1. Questo è un esempio di un filtro di Chebyshev, commentato per la prima volta dal matematico russo in uno scritto del 1853. Questo particolare filtro

iene poi violato per p = 26 861, quando il resto 1 guadagna momentaneamente la prima posizione.: Ma si tratta di un'anomalia soltanto temporanea: la prima vera ***zona*** di violazione è in corrispondenza degli 11 numeri primi nell'intervallo tra p = 616 877 e p = 617 011. I resti pari a 1 conquistano il primato per soltanto 1939 dei primi 5,8 milioni di numeri primi, che rappresentano il limite al quale mi sono fermato. Non lo conquistano ***una sola volta*** negli ultimi 4 988 472 di questi numeri primi.

Se il divisore è 3, il filtro ha un effetto ancora più drammatico. Qui, il resto (a partire da p = 3) può essere 1 o 2,, e il filtro è a 2. Questo filtro non è violato fino a p = 608 981 813 029. Ora sì che ***questo*** è un filtro! Questa violazione è stata individuata nel 1978, da Carter Bays e Richard Hudson: Avrò occasione di menzionare ancora il filtro di Chebyshev nel capitolo 14."

E, a pag. 246 del cap. 14:

"… Sei nomi di Bays e Hudson vi dicono qualcosa, è perché li ho citati nel paragrafo 8.4 a proposito del filtro di Chebyshev. Esiste in effetti un livello profondo, troppo profondo per parlarne ancora qui, in cui la tendenza di Li(x) a essere maggiore di π(x) ricorda il filtro di Chebyshev: Questi due argomenti sono in genere considerati insieme dai teorici di analisi dei numeri. In effetti, l'articolo di Littlewood del 1914 mostrava non soltanto che la tendenza di Li(x) a diventare maggiore di π(x) è violata un numero infinito di volte, ma che questo è vero anche per i filtri di Chebyshev. Per alcune recenti intuizioni felici sull'argomento, si veda l'articolo ***Chebyshev's Bias,*** di Michael Rubinstein e Peter Sarnak, in << Experimental Mathematics >>, 3(1994), pp. 173-97. "

Quindi, ci potrebbe essere una relazione profonda tra differenze tra due numeri primi consecutivi (e loro preferenza per la forma 6k + 2 rispetto alla forma 6k – 2 e alla forma, ancora più rara, 6k), i filtri di Chebyshev e il Teorema dei Numeri Primi, ed infine, possibilmente, anche con l'ipotesi di Riemann. Tale relazione sarebbe quindi da approfondire meglio in futuro, visto che potrebbe portare a migliori conoscenze sulla distribuzione dei numeri primi, e quindi anche, eventualmente, anche a contributi utili alla dimostrazione dell'ipotesi di Riemann, sfruttando al meglio le oscillazioni numeriche (violazioni) osservate sia nelle differenze tra numeri primi consecutivi, nei filtri di Chebyshev e nel TNP. Tali oscillazioni potrebbero avere tutti una causa comune: la distribuzione non casuale dei numeri primi; studiando ancora bene tali oscillazioni, si conoscerebbe meglio la distribuzione dei numeri primi, attraverso gli eventuali teoremi che ne verrebbero fuori, oltre quelli già noti. Noi, per esempio, studiando il susseguirsi di intervalli più o meno

densi di numeri primi, abbiamo scoperto che, per una conseguenza della congettura di Goldbach (i numeri pari di forma 6k hanno più coppie di Goldbach rispetto ai numeri di forma N = 6k - 2 ed N = 6k + 2), e spesso l'ultima è una coppia di Goldbach di numeri primi gemelli (con differenza 2, e somma di forma p + q =12k), le coppie di primi gemelli sono sempre al centro, da sole o come due coppie di gemelli ravvicinate, di tutti gli intervalli più densi di numeri primi. Per esempio, nell'intervallo di 100 unità tra 9 999 900 e 10 000 000 ci sono ben nove numeri primi :
9 999 901, 9 999 907, 9 999 929, 9 999 931 (prima coppia di gemelli) ,
9 999 937, 9 999 943, 9 999 971, 9 999 973 (seconda coppia di gemelli), 9 999 991, con ben due coppie di numeri primi gemelli ravvicinate (a distanza 40 contro una distanza media locale di

$(\ln 10\,000\,000)^2 = 16{,}11^2 = 259{,}5321$; mentre nell'intervallo successivo, pure di 100 unità, ci sono soltanto due numeri primi:
10 000 019 e 10 000 079 con differenza d = q – p = 10 000 079 – 10 000 019 = 60, contro una distanza media locale di ln 10 000 000 = 16,11
Forme 6k - 2, 6k e 6k + 2, quindi, anche nelle somme dei numeri primi p e q delle coppie di Goldbach, , oltre che nelle differenze tra due numeri primi consecutivi (che, oltre ad essere numeri primi gemelli con differenza 2, negli altri casi sono numeri primi consecutivi o di Polignac, cioè con differenza 2n), e quindi anche di forma 6k - 2, 6k e 6k + 2, come i tre Autori del lavoro "Information Entropy and Correlations in Prime Numbers" hanno osservato, soprattutto per quanto riguarda gli incrementi positivi e negativi (oscillazioni) di tali differenze, collegandole agli oscillatori armonici non interagenti. A conferma che molti fenomeni fisici (ma anche biologici, e raramente anche psicologici) sono regolati anche dai numeri primi, sia direttamente, sia tramite i ***numeri primi naturali*** di forma p = 6f +1, dove f è un numero di Fibonacci, per esempio 127 = 6 * 21 + 1 è un ***numero primo naturale***, poiché 21 è un numero di Fibonacci. Tali numeri naturali si trovano anche come fattori più frequenti nei numeri di dimensione dei gruppi simmetrici di Lie, coinvolti spesso in fenomeni fisici dove la simmetria è importante, ma sono anche nascosti nei cosiddetti "numeri magici" della stabilità nucleare di alcuni elementi chimici.

Caltanissetta 1.10.2009 (data di revisione)

Riferimenti

1. http://www.gruppoeratostene.com , Sezione “Articoli” (“Articoli su Fibonacci”, “Articoli su Goldbach”, ecc.”