

IL PIANO DI FANO, I GRUPPI DI LIE E I NUMERI DI FIBONACCI

Sommario

In questo lavoro tratteremo del *piano di Fano* (Rif. 1, 2 e 3), la geometria proiettiva più piccola, e delle sue connessioni con gli ottonioni e i gruppi di Lie più piccoli (in modo particolare G2, il gruppo di simmetria degli ottonioni). Ma anche della formula base delle geometrie proiettive:

$$n^2 + n + 1 \quad (1)$$

variante (per $n = 1$) della famosa formula di Eulero:

$$x^2 + x + n$$

che dà molti numeri primi (Rif.4, Rif. 5.).

Togliendo l' 1 finale nella (1) – anche questa genera numeri primi - abbiamo la formula $(n^2 + n)$ che ci dà la somma dei primi n numeri pari, mentre se togliamo anche n , abbiamo la formula (n^2) che ci dà invece la somma dei primi n numeri dispari.

Le geometrie proiettive sono possibili solo se n è primo oppure una potenza di un numero primo, il chè

connette i numeri primi alle geometrie proiettive, e attraverso di esse, anche ai rami della fisica che hanno a che fare con i gruppi di Lie (Modello Standard, teorie di stringa, ecc.). Il piano di Fano è la geometria proiettiva più semplice (per $n = 2$ primo), poiché

$$2^2 + 2 + 1 = 4 + 2 + 1 = 7$$

e $7 \times 2 = 14$ = ordine di G_2 , il gruppo di Lie più piccolo di tutti, formato da sette punti e sette rette.

In caso contrario non sono possibili geometrie proiettive (Rif.2) Infine, troviamo una possibile nuova connessione tra gli ordini dei gruppi di Lie e la nota serie di Fibonacci. Il percorso generale di questo lavoro è, in breve:

geometrie proiettive –piano di Fano – ottonioni – gruppi sporadici di Lie – serie di Fibonacci (per poi eventualmente proseguire, con altri lavori successivi, verso le teorie di stringa e le TOE, o Teorie del Tutto).

Questo lavoro, partito dalla somma dei numeri pari successivi (nostra osservazione sulla formula (1)), si ferma alla serie di Fibonacci (anche questa basata com'è noto su somme di soli due numeri di Fibonacci successivi, per es. $1+1=2$, $2+3=5$, $3+5=8$, $8+5=13$ e così via), passando per il piano di Fano e per i cinque gruppi di Lie più piccoli

CAPITOLO 1

Numeri pari, numeri dispari e loro somme, numeri primi o loro potenze e geometrie proiettive.

Breve descrizione del piano di Fano

“ Il “piano di Fano” è il piano proiettivo costruito sullo spazio lineare Z_2^3 , vale a dire il più piccolo piano proiettivo non banale costruibile. E' costituito dai 7 punti di coordinate omogenee:

(0,0,1)

(0,1,0)

(1,0,0)

(0,1,1)

(1,0,1)

(1,1,0)

(1,1,1)

e da sette rette ed è pertanto una geometria finita...”(Rif.1).Ne riportiamo qui di seguito la figura:

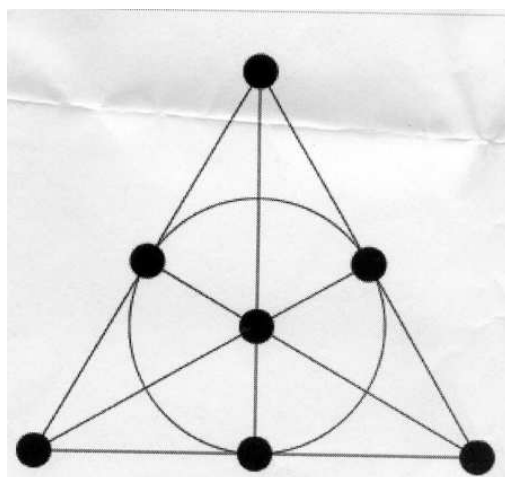


Fig.1

Nel Rif.2, si legge che:

“...Più in generale, si dimostra che in una geometria affine finita, in cui una retta contiene esattamente n punti, tutte le rette ne contengono altrettanti, e ci sono esattamente

$$n^2 \text{ punti ed } n^2 + n \text{ rette} “$$

e poi anche :

“...nel 1906 Oscar Veblen e William Bussey hanno dimostrato che ce ne sono quando n è potenza di un numero primo, e si pensa che non ce ne siano negli altri casi. Finora Richard Bruck e Herbert Ryser l’hanno confermato a mano nel 1946 per 6, e Clement Lam l’ha confermato con il computer nel 1989 per 10, ma non lo si sa ancora per 12 e infiniti altri numeri...”

Connessione con i numeri pari e dispari.

Ricordiamo che la formula $n^2 + n + 1$ (1) contiene n^2 , che è la somma dei primi n numeri dispari (cosa già nota e facilmente controllabile, facciamo un solo esempio per $n = 4$:

$$1+3+5+7 = 16 = 4^2)$$

Ma contiene anche $n^2 + n$, che invece è la somma dei primi n numeri pari; per $n = 4$ abbiamo:

$$2+4+6+8 = 20 = 16 + 4 = 4^2 + 4,$$

cosa che potrebbe benissimo riguardare le geometrie proiettive: per avere il numero totale dei suoi elementi basta aggiungere 1 alla formula n^2+n , somma dei primi n numeri pari. Tale formula dà esattamente il numero degli elementi (133) del gruppo di Lie E_7 per $n = 11$, infatti $11^2 + 11 + 1 = 133$, e 132 è la somma dei primi 11 numeri pari.

Nel piano di Fano, i numeri pari sono solo 2 e 4, ed $n = 2$, tale che $2^2 + 2 + 1 = 7$, equivalente a $2+4+1=7$ (somma dei primi due numeri pari più uno). I numeri pari in questo caso sono i quattro punti in basso e i due punti centrali nella Fig. 1. Ed $n = 2$ è anche il numero primo più piccolo, come da regola generale (n numero primo o potenza di numero primo).

Per $n = 12$ (non primo ne potenza di primo) la (1) ci dà $12^2+12+1 = 157$, che non dà origine a nessuna geometria proiettiva, e così via, mentre abbiamo già visto per $n = 11$, che ci dà 133 numero di elementi di E_7 . Nelle geometrie proiettive, oltre i numeri primi n e le loro potenze, sembrano coinvolti anche i primi n numeri pari e le loro somme, ma anche qui ovviamente n deve essere primo o potenza di primo. Questa nostra osservazione ci sembra nuova (non l'abbiamo riscontrata in altri lavori sull'argomento), in ogni caso comporta una geometria basata su un triangolo numerico, con un numero pari di punti ad ogni livello (massimo alla base e minimo (due) in alto, con un punto al vertice (il +1 della (1))

Un discorso analogo, ma più complicato, si potrebbe fare anche per le rette.

In questo lavoro ci interessa in modo particolare solo il piano di Fano, basato su $n = 2$, il più piccolo numero primo alla base della geometria proiettiva più piccola (sette punti e sette rette), e connesso agli ottonioni (l'algebra di divisione più grande) e al più piccolo gruppo di Lie G_2 con $= 14$ elementi, e che è il gruppo di simmetria degli ottonioni. Ma vediamo anche che con le successive potenze di $n = 2$ e con la (1), si hanno delle connessioni aritmetiche, che potrebbero essere fondate, con gli altri gruppi di Lie :

TABELLA 1

m	$n = (p^m)$	$(p^m)^2$	$+ p^m$	$+ 1 = N$	primo si/no
1	$2^1 = 2$	4	2	<u>7</u>	si
2	$2^2 = 4$	16	4	<u>21</u>	no 3×7
3	$2^3 = 8$	64	8	73	si
4	$2^4 = 16$	256	16	273	no 13×21
5	$2^5 = 32$	1024	32	1057	no <u>7</u> \times 151
...

Possibili connessioni: 7 è connesso al piano di Fano
 $\underline{7} \times 2 = (\underline{7} + \underline{21})/2 = 14 = G_2$
 $73 - 21 = 52 = 4 \times 13 = F_4$
 $52 + 13 + 13 = 6 \times 13 = 78 = E_6$
 (dove $13 = 3^2 + 3 + 1$ per $n = 3$)
 $6 \times \underline{21} + \underline{7} = 133 = E_7$
 (anche 3 soddisfa la (1) per $n = 1$,

$$\text{poiché } 1^2+1+1 = 1+1+1=3)$$

per $n=p=3$ abbiamo invece

TABELLA 2

<u>m</u>	<u>p^m</u>	<u>(p^m)² + p</u>	<u>+ 1</u>	<u>= N</u>	<u>primo</u>	<u>si/no</u>
1	3 ¹ = 3	9	3	<u>13</u>	si	
2	3 ² = 9	81	9	<u>91</u>	no	= <u>7</u> x <u>13</u>
3	3 ² =27	729	27	757	si	
...

7 = 2²+2+1, vedi per n = 2 in TABELLA 1

Possibili connessioni coi i gruppi di Lie:

$$G_2 = \underline{13} + 1 = 14$$

$$F_4 = (\underline{13}+\underline{91})/2 = 104/2 = 52$$

$$E_6 = 91 - 13 = 78$$

$$E_7 = \underline{91} + 39 + 3 = 133; \quad (39 = 3 \times \underline{13}); \quad 3 = 1^1 + 1 + 1 \text{ per } n=1$$

Per $n = 5$ abbiamo i numeri finali $5^5+5+1 = \underline{31}$ primo

e per $n^2=5^2$ abbiamo $25 \times 25 + 25 + 1 = 651 = \underline{3} \times \underline{7} \times \underline{31}$,

in cui tutti e tre i numeri sono di forma $n^2 + n + 1$ per $n=1$, $n=2$ ed $n = 5$

Possibili relazioni con i gruppi di Lie:

$$F_4 = 25 + 25 + 1 + 1 = 52$$

Per $n = 7$ abbiamo i numeri finali

$$7^2+7+1 = 49 + 7 + 1 = 57 = \underline{3} \times 19$$

Per $n = 7^2$ abbiamo $49^2 + 49 + 1 = 2451 = \underline{3} \times 19 \times 43$

e nessuna connessione diretta con i gruppi di Lie.

Per $n = 11$ invece abbiamo la connessione diretta

$$E_7 = 11^2+11+1 = 121 + 11 + 1 = \underline{133} ;$$

$$\text{per } n = 13 \text{ abbiamo } 13^2 + 13 + 1 = 183$$

con possibile connessione $183 + 65 = 248 = E8$
 con $65 = 5 \times \underline{13}$, e $65 - 52 = \underline{13}$ con $F4 = 52 = 4 \times \underline{13}$

Il 13 come si vede è molto coinvolto nei gruppi di Lie, come vedremo anche in seguito (Capitolo 2) a proposito delle relazioni tra gruppi di Lie e numeri di Fibonacci, e lo stesso 13 è un numero di Fibonacci.

Oltre a queste significative connessioni della formula di base n^{n+1} per $n = 2,3,7,11$ e gli ordini dei gruppi di Lie, dobbiamo dire anche che questi ultimi dovrebbero essere dati dalla somma di tante rette e tanti punti (o combinazioni di rette e punti) per formare una geometria proiettiva, come 7 punti e 7 rette nel piano di Fano, tali che $7+7 = 14 = G2$

Infatti, per gli altri gruppi:

$$14/2 = 7 = \underline{7} \times \underline{1}$$

$$52/2 = 26 = \underline{13} \times \underline{2}$$

$$78/2 = 39 = \underline{13} \times \underline{3}$$

$$248/2 = 124 = 11 \times 11 + \underline{3} = \underline{13} \times \underline{3} \times \underline{3} + \underline{7}$$

solo $E7 = \underline{133}$ è dispari e si può scomporre in 66 punti+67 rette+1 (o viceversa) con $66 = 5 \times \underline{13} + 1$ e $67 = 5 \times \underline{13} + 2$
 con totale = $65 + 1 + 65 + 2 = 130 + 3 = \underline{133}$

Riepilogando:

$$14 = 7 \text{ rette e } 7 \text{ punti}$$

$$52 = 26 \text{ rette e } 26 \text{ punti}$$

$$78 = 39 \text{ rette e } 39 \text{ punti}$$

$$133 = 66 \text{ punti e } 67 \text{ rette (o viceversa)}$$

$$248 = 124 \text{ rette e } 124 \text{ punti}$$

e forse questo è il modo giusto per la formazione degli ordini dei gruppi di Lie, il ché non esclude le connessioni e le combinazioni prima viste con la (1) per $n = 1, 2, 3, 5$ e 7 , tutti numeri primi.

CAPITOLO 2

Connessione con la serie di Fibonacci

Una nostra connessione trovata in precedenza tra gli ordini dei gruppi di Lie e la serie di Fibonacci è esprimibile con la formula

$$L_m = k \cdot n! + k' \cdot \underline{Fi} \quad (2)$$

Nella quale compaiono i fattoriali $n!$, base delle simmetrie (e quindi delle permutazioni) connesse ai gruppi di Lie, e i numeri di Fibonacci; ed entrambi compaiono o da soli, o sottoforma di multipli k e k' , spesso n è anch'esso numero di Fibonacci, per esempio 3, 5, 8:

Esempi:

$$G_2 = 14 = 6 + 8 = 3! + 8$$

$$F_4 = 52 = 18 + 34 = 3 \times 3! + 34$$

$$E_6 = 78 = 3 \times 24 + 6 = 3 \times 4! + 2 \times 3$$

$$E_7 = 133 = 120 + 13 = 5! + 13 = 5 \times 4! + 2 \times 3$$

$$E_8 = 248 = 240 + 8 = 2 \times 5! + 8$$

Altri gruppi di Lie successivi:

$$7920 = 5760 + 15 \times 144 = 8! + 15 \times 144$$

$$175560 = 46080 + 129480 = 64 \times 6! + 9960 \times 13$$

$$(175560 = 40320 + 6440 = 8! + 6440 \times 21)$$

... ..

La nuova connessione ora trovata tra gli ordini dei gruppi di Lie e i numeri di Fibonacci è che quasi sempre i primi sono multipli k di $\underline{7}$ e di 13 , due numeri primi che soddisfano la (1) per $n = 2$ ed $n = 3$, come visto in precedenza, e che k è spesso un numero di Fibonacci o un numero molto vicino, con differenze d molto piccole ma solo per i primi gruppi, come da tabella seguente:

$$\underline{\text{ordini gruppi di Lie}} = \underline{7k, 7k + x} \quad k \approx \underline{Fi} \quad d = \underline{Fi - k}$$

14	7×2	$2 = 2$	0
52	$7 \times 7 + 3$	$7 \approx 8$	1
78	$7 \times 11 + 1$	$11 \approx 13$	2
133	7×19	$19 \approx 21$	2
248	$7 \times 35 + 3$	$35 \approx 34$	-1
7920	$7 \times 1131 + 3$	$1131 \approx 987$	-144
175560	7×25080
244823040	7×34974720
...

I primi numeri k sono molto vicini ai numeri di Fibonacci 2, 8, 13, 21, 34; mancano soltanto il 3 e il 5. e con piccole differenze d, anch'esse numeri di Fibonacci : 0, 1, 2, 144).

Costruiamo ora anche la tabella per n = 13, con la quale si recuperano anche i numeri di Fibonacci 3 e 5:

<u>Ordini dei gruppi di Lie</u>	<u>$13k, 13k + x$</u>	<u>$k \approx Fi$</u>	<u>$d = Fi - k$</u>
14	$13 \times 1 + 1$	$1 = 1$	0
52	13×4	$4 \approx 3$	-1
78	13×6	$6 \approx 5$	-1
133	$13 \times 10 + 3$	$10 \approx 8$	-2
248	$13 \times 19 + 1$	$19 \approx 21$	-2
7920	$13 \times 609 + 3$	$609 \approx 610$	1
175 560	$13 \times 13504 + 8$
244 823 040	$13 \times 18832541 + 7$
...

Anche qui le differenze $Fi - k$ sono minime, sempre per i primi gruppi di Lie; ora mancano i numeri di Fibonacci 2 e 13 fino al 21. mettendo però in un'unica serie tutti i numeri di Fibonacci coinvolti, abbiamo la serie completa:

1, 2, 3, 5, 8, 8, 21, 34 con l'8 che si ripete due volte (forse è anche per questo che il gruppo E8 si ripete due volte nelle teorie di fisica quantistica?)

Poi si passa direttamente a 987 nella tabella per $p_n=7$ e a 610 nella tabella per $n=13$. Ma i valori di k sono molto vicini ai numeri di Fibonacci F_i , perché tale chiarissima quasi coincidenza $k \approx F_i$ sia solo un caso, e la cosa meriterebbe di essere approfondita con ulteriori lavori, nostri o altrui che fossero, e che ovviamente coinvolgerebbero il numero aureo $\Phi = 1,618$ nelle formule che riguardano il Modello Standard e le Teorie di stringa, e in alcuni lavori già vi appare (per esempio, la Simple Toe di Garrett Lisi) Solo dopo l'ordine 7920 la relazione con Fibonacci diventa più vaga. Del resto, anche gli ordini dei primi cinque gruppi di Lie più piccoli non sono molto lontani da alcuni numeri di Fibonacci o una loro media aritmetica:

$$14 = \mathbf{13} + 1$$

$$52 = \mathbf{55} - 3$$

$$78 \approx 72 = (\mathbf{55} + \mathbf{89})/2$$

$$133 = \mathbf{144} - 11 \quad (\text{con } 11 = \mathbf{8} + \mathbf{3} = \text{numeri di Fibonacci})$$

$$248 = \mathbf{233} + 15 \quad (\text{con } 15 = \mathbf{2} + \mathbf{5} + \mathbf{8} = \text{numeri di Fibonacci})$$

... ..

CONCLUSIONI

In questo breve lavoro abbiamo esaminato gli ordini dei gruppi di Lie più piccoli in base alla formula base delle geometrie proiettive

$$n^2 + n + 1$$

basata a sua volta (togliendo l' 1 finale) sulla somma dei primi n numeri pari (nostra osservazione, forse finora sfuggita ad altri), mentre la relazione con i numeri primi n o loro potenze era già nota. Abbiamo inoltre trovato la nuova connessione con i numeri di Fibonacci fino a 34, certamente non casuale, e anche con i numeri di Fibonacci 987 e 610 con il gruppo di Lie con 7920 elementi, connesso al numero primo $n = 89$ tale che $89^2 - 1 = 7920$ e cioè 3960 rette e 3960 punti (in questo caso la variante della (1) è soltanto $n^2 - 1$, anziché la forma completa $n^2 + n + 1$. In tal caso 7920 è la somma dei primi 89 numeri dispari, meno 1, anziché una somma di n numeri pari come negli altri casi. Il numero degli elementi di un gruppo di Lie potrebbe dato, talvolta, anche da una variante della (1), pur rimanendo valida per i gruppi di Lie più piccoli e le relative geometrie proiettive.

GRUPPO ERATOSTENE

Caltanissetta 8.5.2009

Riferimenti:

1. "Piano di Fano", Wikipedia
2. "La danza dei sette punti" di Piergiorgio Odifreddi, in "LE SCIENZE" Aprile 2009 pag.23.
3. Jan Stewart, "Leleganza della verità – Storia della simmetria", Einaudi, Cap. quindicesimo, pagg. 291-307
4. "Eulero", Rubrica "Storia" sul nostro sito
5. Ing. Rosario Turco, prof. Maria Colonnese "Forme generatrici di numeri primi" sezione Link, Block Notes Matematico, dell'Ing. Rosario Turco (26.8.2008)

Nota 1

Tabella basata sulla formula n^2+n+1 con n numeri primi da 2 a 13, e anche per il numero 1 iniziale, visto che anch'esso soddisfa (1) ed è fattore di molti T_n :

n	n^2	$+$	n	$+$	1	$=$	T_n	relaz. Con i gruppi di Lie
1	1		1		1		3	primo
2	4		2		1		<u>7</u>	primo $7 + 7 = 14 = G2$
3	9		3		1		<u>13</u>	primo $13 + 1 = 14 = G2$
5	25		5		1		<u>31</u>	primo
7	49		7		1		57	$= 3 \times 19$
11	121		11		1		133	$= 7 \times \underline{19}$ $133 = F4$
13	169		13		1		183	$= 3 \times \underline{61}$
17	289		17		1		<u>307</u>	primo
19	361		19		1		381	$3 \times \underline{127}$ $(127 \times 2 - 6 = 248 = E8)$

... ..

Si nota facilmente che tutti i numeri primi coinvolti (eccetto il 3 iniziale) 7, 13, 19, 31, 61, 127, 307 sono tutti di forma $6k + 1$, e anche tra i fattori di $E8 = 248 = 2 \times 2 \times 2 \times \underline{31}$, contiene 31, il valore di T_n per $n = 5$, che è anche k per 31, essendo 31 $= 6 \times 5 + 1$; circa Fibonacci, anche qui i valori di T_n sono prossimi a numeri di Fibonacci F_i , o ad una loro media aritmetica:

T_n	F_i	diff. $d = F_i - T_n$
3	3	0
7	8	1
13	13	0
31	34	3

57	55	-2	
133	144	11	
183	≈ 188.5	5,5	183 = (233+144)/2
307	≈ 305	-2	307 = (233+377)/2
381	377	-4	
...	

(Altri T_n vicini o uguali ai numeri di Fibonacci mancanti si ottengono con T_n per n non primi, per esempio per $n = 4$ abbiamo $25 + 5 + 1 = 21 =$ numero di Fibonacci, per $n = 9$ abbiamo $81 + 9 + 1 = 91 = 89 + 2$, per $n = 15$ abbiamo $225 + 15 + 1 = 241 = 233 + 8$, con $21 = 3 \times \underline{7}$, $91 = \underline{7} \times \underline{13}$ e $\underline{241}$ primo di forma $6 \times 40 + 1$, e $\underline{241} + \underline{7} = 248 = E8$, e così via)

Anche la forma $\underline{6k + 1}$ dei numeri primi coinvolti avrebbe quindi il suo ruolo nella formazione delle geometrie proiettive (l'altra forma dei numeri primi è $6k - 1$); oltre che ancora una volta, i numeri di Fibonacci molto vicini anche ai valori di T_n (=Totale somma $n^2 + n + 1$ per ogni n primo e in questo caso, vicinanza con i numeri di Fibonacci, n anche non primo), cose che eventualmente, saranno approfondite in seguito, ove si volessero ulteriormente cercare altre relazioni tra i valori di T_n e gli ordini dei gruppi di Lie o di altre geometrie proiettive, ecc.

Nota 2

Connessioni principali tra $G_2 = 14$ e gli ottonioni .

Brani più importanti tratti dal 15° capitolo del libro "L'eleganza della verità", Rif. 3 (per tutti gli altri, rimandiamo direttamente al 15° capitolo del suddetto libro)

a) pag. 302:

“...Cartan si chiese semplicemente: qual è il gruppo delle simmetrie degli ottonioni? Solo un genio come lui poteva arrivare alla risposta: è G_2 , il più piccolo gruppo di Lie eccezionale. Un sistema 8-dimensionale ha un gruppo di simmetrie 14-dimensionale. La più grande algebra di divisione è legata al più piccolo dei gruppi semplici eccezionali.”

b) Pag.305:

“...Ma nella riga e nella colonna degli ottonioni compaiono proprio loro, i gruppi eccezionali F_4 , E_6 , E_7 ed E_8 . Manca G_2 , che però come abbiamo visto ha un legame strettissimo con gli ottonioni, visto che è il gruppo delle loro simmetrie.

c) Pag. 305:

“ Se non ci fossero gli ottonioni, la storia dei gruppi di Lie sarebbe stata più semplice, come Killing sperava all’inizio della sua impresa, ma molto meno interessante. A noi mortali non è data scelta, visto che ottonioni e compagnia sono lì e ci restano. Addirittura, forse da loro dipende in qualche misterioso modo l’esistenza stessa dell’universo.”

(la sottolineatura è nostra, N.d.A.A.)

d) Pag 306:

“...Dunque le teorie di stringa candidate si possono definire, rispettivamente, reale, complessa, quaternionica e ottonionica. Capita che allo stato attuale delle ricerche la candidata più autorevole a essere un modello della realtà fisica sia proprio quella a dieci dimensioni, cioè ottonionica. Se si rivelasse corretta, l’universo che abbiamo sarebbe costruito a partire dagli ottonioni.

E non è l’unica situazione in cui saltano fuori con un ruolo importante questi strani << numeri >>, appartenenti alla categoria per un soffio, visto che soddisfano solo i requisiti minimi per essere un’algebra di divisione. La

nuova candidata di moda, la M-teoria, prevede uno spazio tempo a undici dimensioni. Per far sì che corrispondano alle quattro dimensioni da noi percepite, dobbiamo prendere le rimanenti sette e arrotolarle strettamente: E come si fa dal punto di vista tecnico questa operazione? Grazie a G_2 , il gruppo di Lie eccezionale, cioè il gruppo di simmetrie degli ottonioni. Ancora loro. Non più curioso relitto dell'età vittoriana, ma poderoso indizio verso una probabile Teoria del Tutto. Verso un mondo ottonionico.”

Commento.

Ecco perché riteniamo importante la ricerca di altre relazioni, soprattutto matematiche, tra i gruppi di Lie tramite le geometrie finite, piano di Fano sopra tutte, e i numeri primi (n e loro potenze che soddisfano la (1), ma anche tramite i numeri di Fibonacci, chiaramente connessi agli ordini dei gruppi di Lie, ai risultati interi delle loro divisioni per 7 e per 13 (i primi due valori propri di T_n per $n=2$ ed $n=3$), e anche agli stessi valori progressivi di T_n , come abbiamo visto nella Tabella finale in Nota 1.

All'origine, i numeri di Fibonacci si trovarono sommando le coppie di conigli originate da un'unica coppia iniziale.

Ora si tratta di capire meglio cosa sommare per ottenere tutti questi numeri prossimi ai numeri di Fibonacci.

Noi abbiamo proposto di sommare tutti i primi n numeri pari (con n primo o anche una sua potenza, in questo lavoro ci siamo limitati ad n primo), poiché la parte della (1) è $n^2 + n$, che è proprio la formula che dà la somma dei primi n numeri pari, e aggiungendo 1 per ottenere la base numerica di ogni geometria proiettiva; e la più piccola geometria del genere è proprio il piano di Fano, con $n = 2$ e $T_n = 7$, cioè rispettivamente il numero primo più piccolo e il valore di T_n più piccolo di tutti gli altri, legato a

$G2 = 14 = 7 + 7$ e indirettamente anche agli ottonioni, a loro volta connessi al numero $8 = 7+1$.

NOTA 3

Tabella dei quadrati (somma dispari), dei quadrati + n (somma pari) e della serie di Fibonacci)

n	n^2	n^2+n	serie di Fibonacci			
a	b	c	d	e	d-b	e-c
1	1	2	1	2	0	0
2	4	6	3	5	-1	-1
3	9	<u>12 + 2 = 14 = G2</u>	8	<u>13</u>	-1	1
4	<u>16 - 2 = 14 = G2</u>	20	13	21	-3	1
5	25	30	21	34	-4	-4
6	36	42				
7	<u>49 + 3 = 52 = F4</u>	<u>56 - 4 = 52 = F4</u>		<u>55</u>		-1
8	64	<u>72 + 6 = 78 = E6</u> $\approx (55+89)/2$				
9	<u>81 - 3 = 78 = E6</u>	90		89		-1
10	100	110				
11	121	<u>132 + 1 = 133 = E7</u>				
12	144	156	144		0	
13	169	182				
14	196	210				
15	225	<u>240 + 8 = 248 = E8</u>		233		7
16	256	272				
17	289	306				
18	324	342				
19	361	380		377		-3
...
24	576	600		610		10
...

31	961	992	987	-5
...
39	1521	1560	1577	-17
...
88	7744	<u>7832+88=7920</u>	6765	-979
...	<u>(7744+88+88= 7920)</u>			
...

Come si vede, la serie di Fibonacci “costeggia” all’inizio entrambe le serie dei quadrati n^2 e dei quadrati n^2+n , e da 55 in poi solo la seconda serie (tranne i soli 144, già quadrato perfetto, e 7744, più vicino a 6765), ed ecco forse perchè costeggia anche i gruppi di Lie, basati sulla forma n^2+n+1 come da formula (1) alla base delle geometrie proiettive, come visto nelle tabelle precedenti.

FINE