

**PROGRESSIONI ARITMETICHE
DI TERZO TIPO (PAP3 o di EULERO)**

Oltre alle PAP1 di numeri primi non consecutivi (ma con differenza costante $d = 6n$), e alle PAP2 di numeri primi consecutivi (ma con differenza variabile $d = 6n$, $d = 6n \pm 2$, e cioè uguale a tutti i numeri pari $2n$), esistono anche progressioni di numeri primi, che chiameremo PAP3, di numeri primi non consecutivi (e quindi più simili alle PAP1), ma con differenza crescente variabile $2n$ tra un numero primo e il successivo (mentre nelle PAP2, fatte di numeri consecutivi: la differenza tra un numero primo e il successivo cresce o decresce, pur essendo sempre di forma $d = 6n$, $d = 6n \pm 2$, e quindi di forma $2n$ in ogni caso.

Queste PAP3 le chiameremo anche di Eulero poiché derivano da equazioni di tipo

$$x^2 + x + 41$$

(o qualche altro numero primo purchè di di forma $q = 6n - 1$, come vedremo in seguito, ma non di forma $q = 6n + 1$, ma a questo Eulero

non era arrivato...).

Citeremo a questo proposito il libro di Marcus du Sautoy “L’enigma dei numeri primi” (Rizzoli), pag. 86, capitolo “ Gli atomi dell’aritmetica”, parlando di Eulero :

“ Una delle sue scoperte più curiose fù una formula che sembrava generare un’inspiegabile quantità di numeri primi.

Nel 1772 calcolò tutti i risultati che si ottengono quando si inseriscono i numeri compresi fra 0 e 39 nella formula

$$x^2 + x + 41.$$

Ottenne il seguente elenco:

41, 43, 47, 53, 61, 71, 83, 97, 113, 131, 151, 173, 197, 223, 251, 281, 313, 347, 383, 421, 461, 503, 547, 593, 641, 691, 743, 797, 853, 911, 971, 1.033, 1.097, 1.163, 1.231, 1.301, 1.373, 1.447, 1.523, 1.601.

A Eulero sembrava bizzarro che fosse possibile generare così tanti numeri primi utilizzando quella formula. Comprese che il processo era destinato a interrompersi a un certo punto.

Probabilmente vi è già chiaro che quando si inserisce 41 nella formula si ottiene un risultato che è divisibile per 41. Anche per $x = 40$ la formula produce un numero che non è primo.

Nondimeno, Eulero fu molto colpito dalla capacità della sua formula di produrre tanti numeri primi.

Cominciò a chiedersi con quali altri numeri diversi da 41 si sarebbe potuto ottenere un risultato simile. Scopri che oltre a 41 si poteva scegliere anche $q = 2, 3, 5, 11, 17$ perché la formula $x^2 + x + q$ producesse numeri primi per ogni valore di x compreso tra 0 e $q - 2$.

Ma trovare una formula altrettanto semplice che generasse tutti i numeri primi era un'impresa impossibile persino per il grande Eulero.

(Noi stiamo già lavorando a due semplici algoritmi che, basati sulle forme $6n \pm 1$ e sul test di primalità di Wilson, danno rispettivamente tutti i numeri primi di forma $6n - 1$ e $6n + 1$, tranne i soli 2 e 3 .

Il problema, già noto, è che trattandosi di fattoriali $n!$, per ottenere numeri primi successivi molto grandi occorrerebbe un tempo lunghissimo, quindi ora è solo un problema di tempo di calcolo, ma non più teorico, e anche questi algoritmi saranno pubblicati su questo sito nei prossimi mesi, N.d.A.A.) . Prosegue Du Sautoy:

“Come scrisse nel 1751, << ci sono alcuni misteri che

la mente umana non penetrerà mai.

Per convincercene non dobbiamo fare altro che gettare un'occhiata alle tavole dei numeri primi. Ci accorgeremo che non vi regna né ordine né legge.”

Con le forme $6n \pm 1$ notiamo un maggiore ordine, che si estende anche ai prodotti di due numeri primi di forma $6n \pm 1$, e quindi con eccezione dei due soli numeri primi 2 e 3, che non sono di tale forma ($2=6*0+2$; $3=6*0+3$); e che un sesto di N, $s = (N \pm 1) / 6$, è uguale anche a $pn \pm m = qm \pm n$ (con $p = 6m \pm 1$ e $q = 6n \pm 1$) e quindi s connette tutti i numeri coinvolti p, p, m, n, s, ed $N = p*q$. Abbiamo anche trovato che N è primo solo quando esiste solo la coppia $m = 0$ ed $n = s$, poiché $p=6*0 \pm 1 = -1$ e $+1$ (fattore banale di N) e $6*s \pm 1 = N$ (l'altro fattore banale), mentre per tutti i numeri composti di forma $N = p*q = (6m \pm 1) (6n \pm 1)$, esiste sempre almeno una coppia, una per ogni coppia di fattori diversi), con $m > 0$ ed $n < s$ tali da formare i due fattori $p = 6m \pm 1$ e $q = 6n \pm 1$, ed $N = 6s \pm 1$, anche se tale connessione non è ancora di alcuna utilità per qualche

nuovo test di primalità, o per qualche nuovo metodo di fattorizzazione.

Ma potrebbe essere utile in futuro in tal senso, o per altri teoremi.

Ma torniamo alla formula di Eulero e alle sue possibili progressioni, che abbiamo chiamate PAP3 (con numeri non consecutivi come nelle PAP1 ma con differenza $d = 6n$). Le PAP3 hanno invece differenza crescente progressiva $d = 2n'$ (mentre le PAP2, come si ricorderà dall'articolo precedente, ha numeri primi consecutivi ma con differenza variabile crescente o decrescente, pur sempre di forma $2n'$ con n' variabile). Infatti, osservando bene la sequenza dei $40 = 41 - 1 = q - 1$ numeri primi, notiamo che a partire da 41, abbiamo le seguenti differenze tra un numero primo e il successivo, esprimibili anche come somme come nella tabella che segue:

primo precedente		differenza		primo successivo
-------------------------	--	-------------------	--	-------------------------

$$41 \quad + \quad 2 \quad = \quad 43$$

$$43 \quad + \quad 4 \quad = \quad 47$$

$$47 \quad + \quad 6 \quad = \quad 53$$

53	+	8	=	61
61	+	10	=	71
71	+	12	=	83
83	+	14	=	97
97	+	16	=	113
...	
1.523	+	78	=	1.601

dove $78=2*39=2(41-2) = 2 (q-2)$.

Ora, mentre nelle PAP2 di numeri consecutivi ma con differenza variabile $6n$, $6n \pm 2$ (come da forme $6n \pm 1$), tale differenza è riconducibile e quindi è equivalente a $2n'$ progressiva come quella delle PAP3, infatti:

$d = q - p$	$6n,$	$6n \pm 2$	$2n'$
2		$6*0 + 2$	$2*1$
4		$6*1 - 2$	$2*2$
6	$6*1$		$2*3$
8		$6*1 + 2$	$2*4$
10		$6*2 - 2$	$2*5$

12	6*2		2*6
...
78	6*13		2*39.

Quindi, $6n$, $6n \pm 2$ è riconducibile a $2n'$ come differenza tra due numeri primi, consecutivi o non consecutivi che siano.

Mentre nelle PAP2 tale differenza è irregolare, nelle PAP3 è invece regolare e progressiva, crescendo di due unità alla volta, come da tabella nelle pagine precedenti.

Nelle PAP1 e nelle PAP3 si saltano alcuni primi, mentre ciò non succede nelle PAP2, essendo queste formate un certo numero di soli numeri consecutivi contenuti in un certo intervallo numerico, preceduto o seguito da un altro intervallo di uguale lunghezza ma più o meno denso di numeri primi. Nelle altre PAP, invece, i numeri primi sono dati nel primo caso da $q + 6n$ con $6n$ minimo = numero primoriale tranne il 2 (PAP1), mentre nel secondo caso da $q + 2n'$ in modo progressivo e regolare (PAP3); nelle PAP2, da $q + 6n$ oppure $6n \pm 2$ o anche $q + 2n'$ ma in modo variabile e irregolare, pur nell'ambito della progressione madre o principale $1+4+2+4+2+4+2...all'infinito$, che incontra tutti i numeri primi ma

anche i loro prodotti $N = p * q$ con p e q di forma $6n \pm 1$, e quindi 2 e 3 esclusi. A proposito di forma, i numeri primi della PAP3 di Eulero hanno forma mista (mentre si ricorda che nelle PAP1 i suoi numeri primi sono tutti della stessa forma, $6n - 1$ oppure di forma $6n + 1$, cioè la stessa forma del numero primo iniziale; ma nelle PAP3, sebbene i suoi numeri primi sono di forma mista, abbiamo però notato (ma non Eulero, che forse non conosceva le forme $6n \pm 1$) una cosa molto importante, e cioè che i numeri q che danno origine ad una progressione di numeri primi con la sua formula (e quindi una PAP3) sono, tranne il 2 e il 3 iniziali, tutti di forma $q = 6n - 1$, ma non di forma $q = 6n + 1$, cosa ancora tutta da spiegare.

Infatti, 5, 11, 17 e lo stesso 41, sono tutti di forma $6n-1$, poiché:

$$5 = 6 * 1 - 1,$$

$$11 = 6 * 2 - 1,$$

$$17 = 6 * 3 - 1$$

$41 = 6 * 7 - 1$, e forse anche tutti gli altri possibili q che possano dare origine a PAP3 di $q - 2$ numeri primi.

Nella serie 5, 11, 17, 41, mancano il 13 e il 23, poiché per essi, le loro PAP3 incontrano molti multipli di 5, già a partire già da

$13 + 2 = 15$ e $23 + 2 = 25$, cosa che succede anche con tutti i numeri q che terminano per 3, e cioè 13, 23, 43, 53, 73, 83, 103... pur essendo alcuni di essi di forma $6n - 1$.

Ecco perché tutti i numeri primi terminanti con 3, tranne il 3 iniziale, sono esclusi dalla lista dei numeri q che possono dare una progressione di $q - 1$ numeri primi con q finale nella formula di Eulero $x^2 + x + q$, e quindi una PAP3.

Se proviamo una PAP3 con un numero q di forma $6n + 1$, per esempio $7 = 6 \cdot 1 + 1$, abbiamo, immettendo i valori di x da 0 a $5 = 7 - 2$ nella formula di Eulero:

$x=0$	$0^2 + 0 + 7 = 7$	$= 7 + 0$
$x=1$	$1^2 + 1 + 7 = 9$ composto	$= 7 + 2$
$x=2$	$2^2 + 2 + 7 = 13$	$= 7 + 6$ (si salta $11=7+4$)
$x=3$	$3^2 + 3 + 7 = 19$	$= 7 + 12$ (si salta 17)
$x=4$	$4^2 + 4 + 7 = 27$ composto	$= 7 + 20$ (si salta 23)
$x=5$	$5^2 + 5 + 7 = 37$	$= 7 + 30$ (si saltano 29, e 31)

Fine della progressione, che salta alcuni numeri primi ma incontra i numeri composti 9 e 27, e quindi non è una progressione

di Eulero interessante, che contiene $q - 1$ numeri primi, pur saltandone qualcuno. Lo stesso succede con altri numeri di forma $6n + 1$, per es. $43 = 6 \cdot 7 + 1 = 42 + 1$:

$$x=0 \quad 0^2 + 0 + 43 = 43$$

$$x=1 \quad 1^2 + 1 + 43 = 45 \text{ composto}$$

$$x=2 \quad 2^2 + 2 + 43 = 49 \text{ composto,}$$

$$x=3 \quad 3^2 + 3 + 43 = 67$$

$$x=4 \quad 4^2 + 4 + 43 = 63 \text{ composto}$$

e così via fino a

$$x = 3 = 43 - 2 \quad 31^2 + 31 + 43 = 961 + 31 + 43 = 1.035 \text{ composto,}$$

e lo stesso succede per tutti i numeri q di forma $6n + 1$.

Però anche i numeri q di forma $6n + 1$ possono dare luogo a PAP3 di Eulero, ma modificando la sua formula in:

$$x^2 + x - q$$

infatti con questa si ottengono anche numeri primi negativi e positivi, come nell'esempio per $q = 7$

$$0 - 7 = -7$$

$$2 - 7 = -5$$

$$6 - 7 = -1 \text{ (che insieme a } 1 \text{ è di forma } 6 \cdot 0 \pm 1 = -1 \text{ e } +1 \text{ fattori)}$$

banali di qualsiasi numero)

$$12 - 7 = 5$$

$$20 - 7 = 13$$

$$30 - 7 = 23$$

$$42 - 7 = 35 \text{ composto e fine della PAP3 per } q = 7, \text{ con } 4 = 7-3$$

numeri primi : 5, 7, 13 e 23, anziché $q - 1$ primi come per q di forma $6n - 1$.

I successivi numeri di forma $x^2 + x$ sono, e facilmente calcolabili, 0, 2, 6, 12, 20, 30, 42, 56 ecc, che aggiunti successivamente a un q di forma $6n - 1$ danno i numeri primi della PAP3 di Eulero: per esempio nella progressione iniziale per $q = 41$, abbiamo:

$$41 + 0 = 41$$

$$41 + 2 = 43$$

$$41 + 6 = 47$$

$$41 + 12 = 53$$

$$41 + 20 = 61$$

$$41 + 30 = 71$$

e così via, fino a

$41 + 1560 = 41 + 39^2 + 39$, con $39 = 41 - 2 = q - 2$ come da regola generale. Calcolando una lunga lista di numeri di forma $x^2 + x$; e quindi 0, 2, 6, 12, 20, 30, 42, 56, 72, 90... per un centinaio o un migliaio di valori, si possono costruire molte PAP3 di Eulero molto velocemente, senza calcolare ogni volta tali valori, da sistemare in un'apposita tabella per tali valori, che chiameremo numeri di Eulero, per esempio fino a circa 10.000 ; con la quale calcolare rapidamente PAP3 per q molto alti (notiamo che l'ultimo numero primo più grande, in ogni PAP3, è uguale al circa il quadrato di $q - 1$, oppure a circa il quadrato di q meno $2q$) semplicemente aggiungendo a q tutti i suddetti numeri di Eulero fino a quello relativo a $x = q - 2$.

La formula per calcolare rapidamente tutte le possibili PAP3 è quindi $PAP3(q) = q \pm E$, dove E è la serie dei numeri di Eulero precalcolati ed elencati nell'apposita tabella proposta; e con q iniziale di forma $6n - 1$ con la versione $q + E$, e con q iniziale di forma $6n + 1$ con la versione $q - E$.

Concludendo e riepilogando, con questo terzo lavoro sulle PAP3 abbiamo scoperto che la formula classica di Eulero

$$x^2 + x + q$$

(scrivibile anche come $E + q$) è valida solo per i numeri primi di forma $6n-1$, mentre per i primi di forma $6n + 1$ è valida la versione

$$x^2 + x - q$$

(scrivibile anche come $E - q$);

inoltre, il numero primo q massimo di ogni PAP3 è di circa $q^2 - 2q$, o di circa $(q - 1)^2$; e ancora, che anche le PAP3 sono un sottoinsieme della progressione madre $1+4+2+4+2+4+2....$ estesa all'infinito, ma con il salto di qualche numero primo, e che finisce a circa $(q - 1)^2 \approx q^2 - 2q \approx$ il numero primo più grande della PAP3 per q iniziale; poiché queste scoperte non sono state riportate dal Sauty né, per quanto ne sappiamo, da altri, le riteniamo nuove e originali e utili per ulteriori approfondimenti da parte nostra o di altri matematici studiosi di progressioni di numeri primi i tutti i tre tipi da noi classificati, e anche unificati tramite le forme $6n \pm 1$ applicate alle possibili differenze tra i numeri primi coinvolti: $d = 6n$ costante per le PAP1 con numeri primi non consecutivi,

d = 2n' variabili per le PAP2 con numeri primi consecutivi, d = E per le PAP3 con numeri primi non consecutivi (con pochi salti di numeri primi lungo la PAP3). Tutto ciò potrebbe collegarsi in futuro ai Teoremi di Green e Tao, di Goldston, Yldirim e Pintz sugli intervalli più o meno densi di numeri primi (con risultati positivi sulla congettura dei numeri primi gemelli), ed infine, possibilmente, con la congettura di Riemann, connessa alla distribuzione dei numeri primi: e le PAP1, le PAP2 e le PAP3 ci dicono già qualcosa, e ancora molto potrebbero dirci in futuro, su tale distribuzione, collegata alla funzione zeta di Riemann. Ecco perché esse sono sempre più importanti da studiare e comprendere. I nostri lavori vanno in questa interessante direzione, che potrebbe interessare in seguito anche la congettura di Goldbach, quella dei numeri gemelli e la congettura di Polignac.

GRUPPO ERATOSTENE

Caltanissetta 1.9.2010 (data di revisione)