PROPOSTA DI DIMOSTRAZIONE DELLA CONGETTURA DI OPPERMANN E SUA POSSIBILE ESTENSIONE

La congettura di Oppermann dice, in parole semplici, che il numero dei numeri primi fino a $n^2 + n$ è maggiore del numero dei numeri primi fino a n^2, e questo è a sua volta maggiore del numero dei numeri primi fino a $n^2 – n$. In simboli matematici:

$$\pi(n^2 + n) > \pi(n^2) > \pi(n^2 - n)$$

con n sempre maggiore di 1.

(E' possibile una nostra estensione a n^a, con $a>2$)

D I M O S TRA Z I O N E

Poiché il numero dei numeri primi fino a N cresce con N, essendo che

$$\pi(N) \approx N / \log N, \quad \pi(10^n) \approx 2n \quad \text{per } N \text{ di forma } 10^n,$$

ed essendo anche $(n^2 + n) > (n^2) > (n^2 – n)$, anche il numero dei numeri primi decresce proporzionalmente ai suddetti numeri legati a n^2, la congettura dovrebbe essere vera.

Lo dimostreremo definitivamente con una tabella con i primi casi di n, per ricavarne una formula approssimativa per il calcolo del numero dei numeri primi tra n^2 e n^2 + 1, e tra n^2 - 1, dimostrando come tale numero è sempre maggiore di 1 in entrambi i casi e che quindi la congettura è vera; e che è vera, ma con qualche limitazione, anche per n^a al posto di n^2, con a >2 .

TABELLA 1:

n	n^2 – n	π(n^2 - n)	n^2	π(n^2)	n^2 + n	π(n^2 + n)
2	2	1 (solo il 2)	4	2	6	3 (2, 3 e 5)
3	6	3	9	4	12	5
4	12	5	16	6	20	8
5	20	8	25	9	30	10
6	30	10	36	11	42	13
…	…	…	…	…	…	…
10	90	24	100	25	110	29
…	…	…	…	…	…	…
100	9 900	1 219	10 000	1 228	10 100	1 239
…	…	…	…	…	…	…

Come si vede, e com'è del resto ovvio, le due differenze o intervalli n sono sempre più grandi, e quindi possono contenere sempre più numeri primi, e così il numero dei numeri primi fino a n^2 – n, n^2 ed n^2 + n è sempre maggiore per ognuno di essi (vedi terza, quinta e settima colonna): all'inizio con piccoli

incrementi di $\pi(n^2-n)$, $\pi(n^2)$ e $\pi(n^2+n)$, nell'ordine di qualche unità al crescere di n, poi sempre più numeri primi, per esempio per n = 100, nove tra 1 219 e 1 228, e undici tra 1 228 e 1 239.

Tali numeri di numeri primi compresi in questi intervalli tra n^2 - n, n^2 ed n^2 + n, si possono anche calcolare con ottima approssimazione usando la frequenza media locale dei numeri primi (che è prossima alla frequenza media per la potenza 10^m più vicina e quindi f ≈ 2m); e quindi p (numero dei primi mediamente contenuti tra n^2-n ed n^2, e tra n^2 ed n^2 +n, è dato con buona approssimazione dalla formula:

$$p \approx n / f$$

Per esempio, per n = 6, n^2 = 36 come valore medio tra n^2 - n ed n^2 + n, il logaritmo decimale di 36 è Log 36 = 1,5563, e quindi p ≈ n/f ≈ 6 / 2*1,5563 = 1,92 ≈ 2, che è il numero reale dei numeri primi (37 e 41) tra 36 e 42; e c'è un il solo numero primo (31) tra 30 e 36, e due primi (37 e 41) tra 36 e 42vedi Tabella 1, dove 11 - 10 = 1 e 13 – 11 = 2 nella riga n = 6. Tale calcolo risulta più Evidente per n = 100, essendo = Log 10.000 = Log 10^4 = 2*4 = 8 e

quindi $p \approx 100/8 = 12.5$ = p statistico, mentre p reale = 9 numeri primi tra 9 900 e 10 000 e 11 numeri primi tra 10 000 e 10 100, con 9 e 11 valori reali molto prossimi al valore statistico 12,5. Con ciò, la congettura di Opperman è dimostrata, e si può esprimere in formule anche con:

$\pi(n^2 - n) + p \approx \pi(n^2)$ (1)

$\pi(n^2) + p \approx \pi(n^2 + n)$ (2)

$(n^2 - n) + 2p \approx \pi(n^2 + n)$ (3)

per esempio per n = 100, con la (3):

$\pi(9\,900) + 2*12{,}5 \approx 1\,219 + 25 = 1\,244 \approx 1\,239$ = valore reale;

in realtà abbiamo 1 219 + 9 + 11 = 1 219 + 20 = 1 239 = valore reale e i valori statistici sono quindi leggermente approssimati per eccesso rispetto a quelli reali.

Estendendo la congettura a $n^3 - n$, n^3 e $n^3 + n$, e più in generale ad $n^a - n$, n^a ed $n^a + n$, si verificano sempre più spesso delle eguaglianze tra i vari $\pi(n^a - n)$, $\pi(n^a)$ e $\pi(n^a + n)$ per le n-esime righe, e quindi la congettura è valida solo se si ammettono tali uguaglianze, essendo p sempre più piccolo e spesso

uguale a 0 , poiché n diventa più piccolo di f e quindi $p \approx n/f$ statistico diventa minore di 1, e p reale = 0 numeri primi in n unità tra n^a-n ed n^a, e tra n^a e n^a + n; e quindi nessun incremento di numeri primi tra i suddetti intervalli , per cui le formule (1), (2) e (3) diventano:

$\pi(n^a - n) + p =< \pi(n^a)$, con segno = se p = 0 (4)

$\pi(n^a) + p =< \pi(n^a + n)$ con segno = se p = 0 (5)

$\pi(n^a-n) +2p =< \pi(n^a + n)$ con segno = se p = 0 (6)

Un esempio per tutti, con a = 3, e quindi n^3 - n, n^3, n^3 + n

TABELLA 2

n	n^3 - n	π(n^3 - n)	n^3	π(n^3)	n^3 + n	π(n^3 + n)
2	6	3	8	4	10	4
3	24	8	27	8	30	9
4	60	17	64	18	68	19
5	120	30	125	30	130	31
6	210	46	216	46	222	46
…	…	…	…	…	…	…
10	990	166	1 000	168	1 010	169
…	…	…	…	…	…	…
20	7 880	946	8 000	957	8 020	960
…	…	…	…	…	…	…

Come si vede, ci sono varie ripetizioni tra i vari valori di $\pi(N)$ nelle varie righe, e un unico valore (46) si ripete per tutte le tre volte per $n = 6$; e ciò succede sempre più spesso al crescere di a, poiché p reale = 0 sempre più spesso.

Conclusione : la congettura di Opperman è vera per tutti gli infiniti n solo per $a = 2$, poiché p reale = n/f è sempre crescente e maggiore di 1; per $a > 2$, p reale sempre più spesso è 0, e quindi si verificano delle ripetizioni dei valori di $\pi(N)$ in diverse n-esime righe; e la congettura in tali casi può considerarsi vera solo se si ammettono tali ripetizioni e quindi anche il caso $p = 0$, assente solo per $a = 2$ della congettura originaria.

I numeri $\pi(N)$ nelle rispettive colonne delle TABELLE 1 e 2 sono stati conteggiati sulle tavole dei numeri primi, mentre per valori molto alti (in future tabelle molto più lunghe per motivi di ricerche eventualmente più approfondite) tali valori possono essere calcolati con buona approssimazioni dalle note formule logaritmiche, da quella più semplice, $\pi(N) \approx N/\log N$, a quelle molto più complicate

(con integrali, ecc.) di tipo Li (N), o Re(N), che danno valori molto più precisi di π(N), e alle quali rimandiamo i lettori interessati.

GRUPPO ERATOSTENE

RIFERIMENTI

"Articoli sui Numeri Primi" sul nostro sito:

www.gruppoeratostene.com

Caltanissetta 1.6.2010