NOTE SULLE CONNESSIONI TRA I NUMERI PRIMI DI FERMAT, I NUMERI PRIMI DI MERSENNE E I NUMERI DI COLLATZ

Lavoro dedicato in particolare ai matematici francesi Sophie-Germain, Fermat, Mersenne (e anche Collatz), i cui numeri sono qui intercconnessi .

………

Abstract

In this work we will to evidence some important connections between Sophie Germain's numbers ($S = 2p + 1$ with p prime numbers), Mersenne's prime numbers ($M_p = 2^p - 1$ with p prime number), Fermat's prime numbers ($F_n = 2^{2^n} + 1$) and Collatz's numbers ($c = \frac{2^m - 1}{3}$ with m even number), and general arithmetical form of prime numbers $P = 6k \pm 1$ except 2 and 3.

Riassunto

In questo lavoro metteremo in evidenza le connessioni aritmetiche tra i numeri M di Mersenne e i numeri F di Fermat, primi e non primi, soprattutto per quanto riguarda le potenze pari e dispari di 2 coinvolte, i coefficienti k della forma generale $M = 6k + 1$ (in questo caso i coefficienti k sono anche i numeri di c di Collatz utili a dimostrare la relativa congettura) ed $F = 6k - 1$. Altre connessioni esistono tra i numeri primi gemelli, i numeri di Sophie Germain, i numeri di Mersenne, i numeri perfetti e l'ultimo teorema di Fermat, ecc. (vedi schema finale delle varie connessioni tra i vari tipi di numeri)

…..

Nell' articolo di G. Molteni "Numeri primi, risultati e congetture" sul sito web di MATHESIS – Dipartimento di

Matematica – Università Statale di Milano, l 'Autore a pag. 15 nella sezione "Problemi vari" si pone le due domande:

- **Ci sono infiniti numeri di Fermat $2^n + 1$?**

  Probabilmente no.

- **Ci sono infiniti numeri di Mersenne $2^n - 1$?**

  Probabilmente si"

Sebbene la formula esatta e rigorosa dei numeri primi di Fermat sia

$$F_p = 2^{2^n} + 1$$

, e non più genericamente 2^n , dove per n si intende 2^n) , mentre la formula rigorosa per i numeri primi di Mersenne è

$$M_p = 2^p - 1 \quad \text{con } p \text{ numero primo}$$

e non genericamente $M = 2^n$ con n = p = primo.

Qui di seguito vedremo, con tabelle costruite con le due formule generiche ma evidenziando (in grassetto) i valori relativi alle formule rigorose, se e come i numeri primi

di Ferma e i numeri primi di Mersenne possano o no essere infiniti (i valori relativi alle formule generiche servono ad evidenziare le connessioni aritmetiche tra i due tipi di numeri sia relativamente alla forma generale dei numeri primi $P = 6n \pm 1$ (tranne i soli 2 e 3), sia relativamente ai numeri di Collatz.

Premesse

a) Per i numeri generici di Fermat, affinché $F = 2^n + 1$ sia primo, l'esponente n deve essere pari, poiché per n dispari otteniamo soltanto multipli di 3, e quindi numeri composti $3k = 2^n + 1$; e viceversa, per i numeri generici di Mersenne n deve essere dispari, poiché con n pari si ottengono multipli di 3 e quindi numeri composti $3k = 2^n - 1$, come da successive tabelle 1 e 2

Tabella 1 con n dispari

k_j (di forma $k_j = 4k_{(j-1)} - 1$)

$2^{1} + 1 = 3 = 3 \times 1$ - - - - -

$2^{3} + 1 = 9 = 3 \times 3$ $(3 = 4 \times 1 - 1)$

$2^{5} + 1 = 33 = 3 \times 11$ $(11 = 4 \times 3 - 1)$

$2^{7} + 1 = 129 = 3 \times 43$ $(43 = 4 \times 11 - 1)$

$2^{9} + 1 = 513 = 3 \times 171$ $(171 = 4 \times 43 - 1)$

$2^{11} + 1 = 2\,049 = 3 \times 683$ $(683 = 4 \times 171 - 1)$

… … … … … … … …

con la relazione che la differenza tra un valore di k e il valore di k precedente è una potenza dispari di 2, per esempio

$3 - 1 = 2 = 2^{1}$, $11 - 3 = 8 = 2^{3}$, $43 - 11 = 32 = 2^{5}$,

$171 - 43 = 128 = 2^{7}$, $683 - 171 = 512 = 2^{9}$, ecc.

E quindi, viceversa, una potenza dispari di 2 sommata ad un valore di k, dà il valore di k successivo, per es.

$$2^{n} + k_{(n-1)} = k_n$$

$2^{1} + 1 = 3 = k_1$

$2^{3} + 3 = 11 = k_3$

$2^{5} + 11 = 43 = k_5$

$2^{7} + 43 = 171 = k_7$

… … … …

I valori di k_F per Fermat sono connessi ai valori k_M per Mersenne = c = numerici Collatz, che vedremo successivamente, con la formula

$$k_F = 2c + 1 = 2k_M + 1$$

per esempio

$$3 = 2 \times 1 + 1$$

$$11 = 2 \times 5 + 1$$

$$43 = 2 \times 21 + 1$$

$$171 = 2 \times 85 + 1$$

… … …

Viceversa accade con la

Tabella 2 con n pari

$$2^{0} - 1 = 0 = 3 \times 0 \quad (k_j) \quad - - - - - - -$$

$$2^{2} - 1 = 3 = 3 \times 1 \quad (1 = 4 \times 0 + 1)$$

$$2^{4} - 1 = 15 = 3 \times 5 \quad (5 = 4 \times 1 + 1)$$

$$2^{6} - 1 = 63 = 3 \times 21 \quad (21 = 4 \times 5 + 1)$$

$$2^{8} - 1 = 255 = 3 \times 85 \quad (85 = 4 \times 21 + 1)$$

$$2^{10} - 1 = 1\,023 = 3 \times 341 \quad (341 = 4 \times 85 + 1)$$

$$2^{12} - 1 = 4\,095 = 3 \times 1\,365 \quad (1\,365 = 4 \times 341 + 1)$$

… … … … … … … …

Anche qui, infatti, la differenza tra un valore di k_j e il valore di k precedente = $k_{(j-1)}$ è una potenza di 2, ma questa volta pari , per esempio:

$$1 - 1 = 0 = 2^{0}, \quad 5 - 1 = 4 = 2^{2}, \quad 21 - 5 = 16 = 2^{4},$$

$$85 - 21 = 64 = 2^{6}, \quad 341 - 85 = 256 = 2^{8},$$

$1\,365 - 341 = 1\,024 = 2^{10}$, e così via.

Qui, per inciso, i numeri k 1, 5, 21, 85, 341, 1 365 ecc. di forma 4c +1 sono i numeri c di Collatz (ognuno dei quali si può ricavare dal precedente moltiplicandolo per 4 e aggiungendo 1, per es. 5 = 1 x 4 +1, 21 = 5 x 4 +1, 85 = 21 x 4 +1, 341 = 85 x 4 +1, 1 365 = 341 x 4 +1, ecc.) trovati nella nostra dimostrazione della congettura di Collatz, già pubblicata sui nostri siti di riferimento:

http://www.gruppoeratostene.com

http://www.xoomer.alice.it/stringtheory

(altri lavori sulla congettura di Collatz sono pubblicati anche sul sito dell'Ing. Rosario Turco:

http://geocities.com/SiliconValley/Port/3264 Sez. MISC

e sul suo mathbgog:

http://MATHBuildingBlock.Blogspot.com .

(L'algoritmo 3n +1 inizia la sua fine e termina quando incontra uno degli infiniti numeri di Collatz $c = \frac{2^m - 1}{3}$

con m pari (da qui la connessione con 2^m) dopodichè, essendo le potenze di 2 (pari o dispari non importa) uniformemente pari, esse possono essere divise per due dando sempre numeri pari, fino alla sequenza finale …4, 2, 1 che pone termine al ciclo numerico di Collatz; per esempio per n = 7 :

3 x 7 +1 = 22	**pari**
22 : 2 = 11	**dispari**
11 x 3 + 1 = 34	**pari**
34 : 2 = 17	**dispari**
17 x 3 + 1 = 52	**pari**
52 : 2 = 26	**pari**
26 : 2 = 13	**dispari**
13 x 3 +1 = 40	**pari**
40 : 2 = 20	**pari**
20: 2 = 10	**pari**

10 : 2 = 5 dispari e numero di Collatz

5 x 3 + 1 = 16 = 2^4 pari e potenza pari di 2

16 : 2 = 8 = 2^3 pari

8 : 2 = 4 = 2^2 pari

4 : 2 = 2 = 2^1 pari

2 : 2 = 1 = 2^0 dispari e fine

dell'algoritmo con la sequenza finale …4, 2, 1, quale che sia il numero n iniziale (in questo caso n = 7); quindi tale algoritmo termina sempre in questo modo per tutti gli infiniti n dispari, essendo infiniti sia i numeri di c di Collatz sia le potenze pari di 2 dalle quali inizia la fine dell'algoritmo.

Per le potenze dispari di 2 = 2^n è invece $\dfrac{2^n + 1}{3} = k_F$ ad essere divisibile per 3, dando per risultato i valori di k_F di Fermat, per esempio $\dfrac{2^1 + 1}{3} = 1$; $\dfrac{2^3 + 1}{3} = 3$

5 7

$\frac{2 \;\; + 1}{3} = 11$, $\frac{2 \; + 1}{3} = 43$, e così via.

Premesso tutto ciò, e anche che tutti i numeri primi P tranne il 2 e il 3 sono di forma generale 6k $\pm$ 1, costruiamo ora la tabella generica dei numeri di Fermat $F = 2^n + 1$, evidenziando i numeri primi di Fermat di forma $F_p = 2^{2^n}$, con F_p sottoinsieme di F

TABELLA 3 (con n' pari)

n'	2^n	2^n +1	6k -1	composti	primi $F_p = 2^{2^n} + 1$
0	**1**	**3**		**no**	**si** $F_0 = 3$
2	**4**	**5**	**6 x 1 - 1**	**no**	**si** $F_1 = 5$
4	**16**	**17**	**6 x 3 - 1**	**no**	**si** $F_2 = 17$
6	64	65	6 x 11 -1	si	no
8	**256**	**257**	**6 x 43 -1**	**no**	**si** $F_3 = 257$

10	1 024	1 025	6 x 171 -1	si	no
…	…	…	…	…	…
16	**65 536**	**65 537**	**6 x 10 923 – 1**	**no**	**si F_4 = 65 537**
…	**…**	**…**	**…**	**…**	**….**

Notiamo facilmente che i numeri primi di Fermat così ottenuti terminano tutti con la cifra 7 (tranne il 3 e il 5 iniziali) essendo tutti gli altri numeri generici di Fermat terminanti con la cifra 5, e quindi composti perché divisibili per 5, e si alternano a numeri generici terminanti con la cifra 7; quindi solo tra questi ultimi si troveranno altri eventuali numeri primi di Fermat, che termineranno con la cifra 7 come già i precedenti 17, 257, 65 537, nel caso che essi non siano, insieme al 3 e 5 iniziali, i soli numeri primi di Fermat (cosa che però sembra poco probabile, non essendone trovati altri fino ad oggi, vedi nota 1). Tutti i numeri di Fermat, generici o primi che fossero, sono di forma F = 6k - 1, dove k sono i valori

della Tabella 1 e cioè 1, 3, 11, 43, 171…

con differenza 2^n con n dispari, tra un valore di k e il precedente. Poiché i numeri primi e generici di Fermat terminanti con la cifra 5 e con la cifra 7 si alternano, alternano, i numeri primi F_p di Fermat sarebbero un sottoinsieme di F (numeri generici di Fermat) e poiché in genere un insieme infinito ha sottoinsiemi anch'essi infiniti, anche F_p potrebbe in teoria essere anch'esso infinito, mentre in pratica sembra finito, cosa che fa rispondere "probabilmente no" a G. Molteni alla domanda se essi siano infiniti o no.

In ogni caso, la loro forma generale F = 6k -1 li connette ai numeri d primi di Sophie Germain,

S =2p +1, con p anch'esso primo, per esempio

S =2 x 11 + 1 = 23 = 6 x 4 – 1, anch'essi con tale forma aritmetica, e a loro volta connessi con i numeri di Mersenne in quanto, se p è primo e di forma 4k +1,

allora il numero di Mersenne $2^n - 1$ non è primo; e

i numeri di Mersenne, primi o non primi, sono tutti di forma 6k +1, al contrario dei numeri primi di Sophie Germain, che invece sono di forma 6n – 1 tranne il 7; esempio per tutti:

$p = 11 = 4 \times 3 - 1 = 12 - 1 = 11 = 6 \times 2 - 1 = 11$,

e $2^n - 1 = 2\,048 - 1 = 2\,047$ non primo $= 23 \times 89 = 6 \times 341+1$

e tali numeri di Mersenne non primi $2^n - 1$ non primi sono infine collegati alla formula dei numeri perfetti N_p

$$N_p = \frac{M_n\,(M_n+1)}{2} = 2^{n-1}\,(2n-1).$$

Per esempio,

per $M_2 = 3$ ed $n = 2$, $\frac{3 \times (3+1)}{2} = 6$ numero perfetto N_1

$2^{2-1} \times (2 \times 2 - 1) = 2^1 \times 3 = 2 \times 3 = 6$ numero perfetto “

Per $M_p = 7$ ed $n = 3$, $\frac{7 \times (7 + 1)}{2} = 28$ numero perfetto N_2

$2^{3-1} \times (2^3 - 1) = 2^2 \times (8 - 1) = 4 \times 7 = 28$ num. perfetto ".

I numeri primi di Sophie Germain sono anche collegati con l'ultimo teorema di Fermat: se p è un numero primo di Sophie Germain, non ci sono tre numeri interi tali che 2p +1 non divide il prodotto xyz e che $x^p + y^p = 2^p$.

I numeri di Sophie Germain, di forma 6k -1 sono a loro volta, come i numeri gemelli, i numeri più piccoli delle coppie 6k -1 e 6k +1, con 6k +1 composto (nei numeri gemelli anche 6k +1 è primo), e le coppie 6k -1 primo e 6k +1 non primo (ma prodotto di due primi tranne il 2 e il 3, per es. $6 \times 8 - 1 = 47$ e $6 \times 8 + 1 = 49 = 7 \times 7$ sono le coppie di Chen. Si trova che i numeri di Sophie Gemain S fino a N sono leggermente di più dei numeri gemelli g fino ad N, e precisamente

$$S(N) = g(N) \times 1{,}08,$$

formula che dà valori più precisi che con altre formule con stime meno precise (vedi il nostro lavoro sui numeri primi di Sophie Germain sui nostri due siti di riferimento prima accennati).

Analoga tabella si costruisce per i numeri di Mersenne sia primi (M_p) che generici (M), entrambi di forma generale $M = 2^n - 1$, se n = p primo si hanno i numeri primi di Mersenne $M_p = 2^p - 1$.

TABELLA 4 con n composto oppure n = p primo

n	2^n	$2^n - 1 = M$	6k + 1	composto	primo = M_p
2	**4**	**3**		**no**	**3 = M_2**
3	**8**	**7**	**6 x 1 + 1**	**no**	**7 = M3**
5	**32**	**31**	**6 x 5 +1**	**no**	**31** = M_5
7	**128**	**127**	**6 x 21 + 1**	**no**	**127 = M_7**
9	512	511	6 x 85 +1	si	no
11	2 048	2 047	6 x 341 +1	si	no

13	**8 192**	**8 191**	**6 x 1 365 +1**	**no**	**8191 = M_{13}**
15	32768	32767	6 x 5 461 +1	si	no
17	**131 072**	**131 071**	**6 x 21 845 + 1**	**no**	**131 071 =M_{17}**
19	**524 288**	**524 287**	**6 x 87 381 +1**		**524 287 =M_{19}**
21	2 097 152	2097151	6 x 349 525 + 1		no
…	…	…	…		…

$$2^{32582657} \qquad 2^{32582657} - 1 \qquad \ldots \qquad \approx 10^{9808358} = M_{32582657}$$

Coefficienti k vedi Tab. 2 = numeri di Collatz $c = \dfrac{2^m - 1}{3}$

con m pari, come prima accennato.

I numeri generici di Mersenne e anche i numeri primi di Mersenne terminano ora con le cifre 7 e 1 (anziché con 5 e 7 come i numeri di Fermat), e notiamo pe inciso che $1 = 2^0$, $5 = 2^2 + 1$ e $7 = 2^3 - 1$; questa connessione lega il numero 5 e il segno + alle potenze n pari di $F=2^n +1$,

e il numero 7 con il segno + alle potenze dispari di $M = 2^n - 1$. Questa potrebbe essere la connessione aritmetica di fondo tra i numeri di Fermat e i numeri di Mersenne, primi o no che fossero, e quindi tra F ed M e tra F_p ed M_p.

Tra i numeri generici di Mersenne (così come nei numeri generici di Fermat) si alternano numeri multipli di 5 e numeri terminanti con la cifra 7) ora succede che ogni tre numeri terminanti per 7, uno è multiplo di 7, per esempio nella colonna $M = 2^n - 1$ della Tabella 4, abbiamo 7 = 7 x 1, 511 = 7 x 73, 32 767 = 7 x 4 681, 209 751 = 7 x 7 x 127 x 337 = 7^2 x 127 x 337, ecc. numeri terminanti sia con 7 che con 1, e quindi anche i numeri primi di Fermat terminano, tranne il 3 iniziale, con le cifre 7 e 1 :

7, 31, 127, 8 191, 131 071, 524 287 e sicuramente

anche il 44° numero primo di Mersenne terminerà con la cifra 7 o con la cifra 1.

Quindi, eliminando i due terzi di M, i possibili numeri primi di Mersenne saranno al massimo

$$M_p < \frac{2}{3} M$$

con M_p come possibile sottoinsieme, ora quasi certamente infinito, di M, mentre $F_p < F$ è quasi certamente finito e limitato ai soli cinque numeri primi di Fermat, non essendone ancora trovati altri dopo di essi.

Con questo lavoro si sono trovate delle connessioni prima accennate tra i numeri F ed M generici e quindi anche primi (potenze pari e dispari di due, segno algebrico + e - , ultima cifra compresa tra 1 , 5 o 7 (solo 7 per i numeri di Fermat maggiori di 5 , 7 e 1 per i numeri di Mersenne maggiori di 3, coefficienti k di 6k + 1 collegati ai numeri c di Collatz , a loro volta

collegati alle potenze pari m di 2 tali che $c = \frac{2 \;\; - \; 1}{3}$,

e $\quad 3\,c + 1 = 2^{m}$.

G. Molteni a pag. 17 del suo articolo riporta il 44° numero primo di Mersenne :

$$2^{325882657} - 1 ,$$

che certamente terminerà con la cifra 1 o con la cifra 7, e sarà anche della forma $6\,k + 1$, come tutti i numeri di Mersenne, sia generici (composti) che primi (connessione col segno algebrico -), come pure l'esponente di 2, dispari e primo insieme p = 325 882 657. E "che ha 9 808 358 cifre ed è il più grande numero primo finora trovato (al 3/2007)."

I numeri primi di Mersenne sono ovviamente sempre più rarefatti al crescere d n esponente dispari e primo di 2, ma per p = 32 582 657 è ancora poca cosa rispetto ai numeri primi successivi, di per se infiniti, e che possono

dare origine ad altri possibili infiniti numeri primi di Mersenne ancora più grandi del 44° numero di cui sopra.

Per cui il sottoinsieme M_p dei numeri primi di Mersenne è un sottoinsieme infinito dei numeri primi P.

E precisamente, abbiamo 44 numeri primi di Mersenne su circa 17 642 374 numeri primi fino all'esponente 325 882 657 primo, essendo questo numero all'incirca il 17 642 374° numero primo ≈ π (325 882 657 calcolabile approssimativamente con la formula per π (N):

$$\pi (N) = \pi (325\,882\,657) \approx \frac{325\,882\,657}{\ln 325\,88\,657} \times 1{,}0612 = 17\,642\,374;$$

dove 1,0612 è il nostro numero correttore per una stima più precisa di π(N), vedi sul sito

http://www.xoomer.alice.it/stringtheory

il nostro lavoro " Su alcuni possibili contributi utili alla dimostrazione di Riemann II (RH ed RGH)"

Ciò significa che finora si sono trovati solo 44

esponenti primi (su circa 17 642 374 numeri primi) che hanno dato origine ad altrettanti numeri primi di Mersenne.

Viceversa, per i numeri primi di Fermat (e qui notiamo una ampia asimmetria tra i due tipi di numeri), fino al numero primo 325 882 657 (esponente di 2 per il 44° numero di Mersenne), ci sono appena 28 potenze di 2, delle quali 14 pari, tra cui solo 5 danno origine ai primi cinque numeri primi di Fermat, finora noti, cioè :

$$F_0 = 2^{2^0} + 1 = 3$$

$$F_1 = 2^{2^1} + 1 = 5$$

$$F_2 = 2^{2^2} + 1 = 17$$

$$F_3 = 2^{2^3} + 1 = 257$$

4

$F_4 = 2^{2} \quad + 1 \quad = \quad 65\,537$

…? … ? …? … ?

Ma in teoria sarebbe pur sempre possibile che altri esponenti pari di 2, anche grandissimi e ancora fuori dalla portata degli attuali super computer, possano generare ulteriori numeri primi di Fermat.

Finora comunque i numeri primi di Fermat sono solo cinque, e generati, come abbiamo visto, dalle prime potenze pari di 2, su 14 possibili fino
all'esponente primo di 2 che ha generato il 44° numero primo di Mersenne.

Numeri primi di Fermat F_p, quindi come possibile, teoricamente, infinito sottoinsieme di F; ma in pratica ancora limitato a soli cinque numeri primi di Fermat, e quindi F_p sottoinsieme finito di F. Mentre, per i numeri primi di Mersenne, sia pure anch'essi molto rarefatti (il 44° numero ha ben 9 808 358 cifre, ed è quindi nell'ordine

di circa $10^{9\,808\,358}$. E sicuramente in futuro si scopriranno altri numeri primi di Mersenne ancora più grandi, essendo M_p un sottoinsieme infinito di M, che a sua volta è un sottoinsieme infinito di P, cioè degli infiniti numeri primi.

Scopo principale di questo lavoro era comunque di evidenziare le connessioni aritmetiche tra i due tipi di numeri primi, riconducibili alla forma generale $P = 6k \pm 1$, con coefficienti k , per i numeri generici di Mersenne di forma $M = 6k + 1$, uguali ai numeri di Collatz connessi a loro volta alle potenze pari di 2, come i numeri generici di Fermat, mentre, viceversa, i numeri di Mersenne sono connessi alle potenze dispari di 2.

Schema finale delle connessioni tra i vari tipi di numeri e tra le varie congetture su di essi e sui numeri primi in particolare:

Coppie di Goldbach → (**Congettura debole di Goldbach**)
(p + q = N pari ≥ 4) (p + q + r = N dispari ≥ 7
↓
Coppie di numeri primi gemelli
(p e p+2 = q con p e q primi)
p e q ultima coppia di Goldbach
per molti N = 12n

Ultimo teorema di Fermat
↓ ↓ ↑

Coppie di Polignac
(p e p +2n coppie di
numeri primi consecutivi)
(ultima coppia di Goldbach
per molti pari
per molti N pari)

Numeri di Sophie Germain
p primo e p + 2 composto (Chen)
↓ ↓
Numeri di Mersenne → **Numeri primi di Mersenne**
(6k+1)
↓ ↓ ↓
Numeri di Fermat k= c =Numeri di Collatz Numeri perfetti
↓
Numeri primi di Fermat

(Per le connessioni tra questi numeri e loro congetture con le congetture più importanti vedi lavoro “ Possibili relazioni tra le sei congetture principali (e il Teorema di Fermat) sui numeri primi (Griglia delle possibili connessioni) già su questo sito.

Caltanissetta 18.2.2008

GRUPPO ERATOSTENE

Giovanni Di Maria

Francesco Di Noto

Michele Nardelli

Annarita Tulumello

<u>NOTA 1 sui numeri di Fermat</u>.

Circa la voce su Wikipedia "Numeri di Fermat",

riportiamo solo qualche brano, interessante per il nostro lavoro:

“ Un numero di Fermat, chiamato così dal matematico Francese Pierre de Fermat, è un numero intero esprimibile

come $F_n = 2^{2^n} + 1$ con n intero non negativo.

Numeri primi di Fermat.

Fermat credeva, erroneamente, che tutti i numeri della forma indicata sopra fossero numeri primi.

In effetti, questo è vero per i primi cinque:

$$F_0 = 2^{2^0} + 1 = 3$$

$$F_1 = 2^{2^1} + 1 = 5$$

$$F_3 = 2^{2^2} + 1 = 17$$

$$F_4 = 2^{2^3} + 1 = 257$$

$$F_5 = 2^{2^4} + 1 = 65\,537$$

Non è stato trovato nessun altro numero di Fermat primo, e anzi si ritiene molto probabile che i numeri di Fermat primi siano in numero finito. Si può comunque dimostrare (Teorema di Pepin) che F_n è primo se e solo se $3^{(F_{n-1})/2} \equiv - 1$ …

Si prova che $F_n = F_1 \cdot F_2 \cdot \ldots \cdot F_{n-1} + 2$

In un sistema numerico binario, tutti i primi di Fermat sono palindromi primi (3 = 11, 5 = 101, 17 = 1001, 65537 = 1000000000000001).

Circa i numeri primi di Fermat, riportiamo un brano, con una novità (un possibile e forse anche l'ultimo numero primo di Fermat), dal libro di Jan Stewart "”L'eleganza della verità – Storia della simmetria " (Einaudi) pag. 148:

"…quali sono i numeri di Fermat? I primi tre li abbiamo già visti: 3, 5 e 17. I due successivi sono molto più grandi: 257 e 65 537. E poi basta, non se ne conoscono altri. Nessuno è riuscito a dimostrare che esistono, o al contrario che non esistono. Per quel che ne sappiamo il prossimo, eventuale numero di Fermat

deve essere maggiore o uguale di $2^{33554432}+1$, dove $335544322 = 2^{25}$, che ha più di diecimilioni di cifre.”

Commento : è quindi possibile, salvo eventuali ulteriori dimostrazioni contrarie, che oltre a ai suddetti primi cinque numeri di Fermat noti, e al numero di cui sopra con più di dieci milioni di cifre, non ce ne siano più, e che quindi essi siano di numero finito (soltanto cinque o sei).

<u>Nota 2 sui numeri di Mersenne.</u>

Dalla voce di Wikipedia “Numeri di Mersenne” riportiamo i seguenti brani:

“ Un numero primo di Mersenne è un numero primo esprimibile come:

$M_2 = 2^2 - 1 = 3$

$M_3 = 2^3 - 1 = 7$

$M_5 = 2^5 - 1 = 31$

$M_7 = 2^7 - 1 = 127$

$M_{13} = 2^{13} - 1 = 8\,191$

$M_{17} = 2^{17} - 1 = 131\,071$

$M_{19} = 2^{19} - 1 = 524\,287$

…　　…　　…　　…

(la lista continua fino ad M_{127}, e alla quale rimandiamo per i successivi numeri primi di Mersenne, N.d.A.A.)

“ Se M_n è primo, allora anche n è primo. Invece n primo non che M_n sia primo.

Se M_n non è primo, viene detto semplicemente numero di Mersenne. I numeri primi di Mersenne sono collegati ai numeri perfetti. Nel quarto secolo avanti Cristo, A.C. Euclide dimostrò che se M_n è un primo di Mersenne, allora

$$\frac{M_n \cdot (M_n + 1)}{2} = 2^{n-1} (2n - 1) \text{ è un numero perfetto.}$$

Nel XVIII secolo Eulero provò che tutti i numeri pefetti hanno questa forma. Nessun numero perfetto dispari è conosciuto e si congettura che non ne esistano…

Il più grande primo attualmente conosciuto è proprio un numero di Mersenne trovato dagli statunitensi Curtis Cooper e Steven Boone dell'Università del Missouri nell'ambito del GIMPS; scritto in base 10 è un numero composto da 9 808358 cifre, e precisamente

$$M_{32582657} = 2^{32582657} - 1…$$

(segue la lista dei 44 numeri primi di Mersenne, N.d.A.A.)

<u>Nota 3 sulla Nuova congettura di Mersenne.</u>

La voce di Wikipedia "Nuova congettura di Mersenne" la riportiamo invece per intero:

" In matematica, la Nuova congettura di Mersenne (o Congettura di Bateman, Selfridge e Wagstaffe) è una congettura che riguarda i numeri primi; afferma che per ogni numero naturale dispari p, se almeno due delle seguenti affermazioni sono vere, allora lo sarà anche la terza:

1. $p = 2^k \pm 1$ o $p = 4^k \pm 3$ per un k appartenente ai naturali;

2. $2^p - 1$ è primo (un numero primo di Mersenne)

3. $(2^p + 1) / 3$ è primo (un numero primo di Wagstaff).

Se p è un numero dispari composto, allora anche $2^p - 1$ e $(2^p + 1) / 3$ lo sono. Questa dunque è l'unica condizione necessaria per testare valori primi che soddisfano la congettura.

La Nuova congettura di Mersenne può essere vista come Un tentativo di salvare la congettura di Mersenne (vecchia di oltre un secolo) che si era dimostrata falsa.

Renaud Lifchitz ha dimostrato che la Nuova congettura di Mersenne è vera fino a 12 441 900 testando matematicamente tutti i numeri primi per cui è noto che vale almeno una delle condizioni. Il suo sito

(http://www.primenumbers.net/rl/nmc/)

documenta la verifica fino a questo numero.

Bibliografia

P.T. Bateman, J.L Selfridge and Wagstaff, Jr. Samuel S., " The new Mersenne conjecture", Amer. Math. Montly, 96 (1989) 125 – 128 .