

LA COSTANTE DI MILLS

E I NUMERI PRIMI

“In matematica, si dice costante di Mills il numero reale positivo θ tale che la funzione

$$f(n) = \lfloor \theta^{3^n} \rfloor$$

genera numeri primi per ogni intero positivo, dove

$\lfloor \theta^{3^n} \rfloor$ indica la funzione parte intera di θ^{3^n} . L'esistenza di una costante di questo tipo è stata provata nel 1947 da Mills; il che lo portò ad enunciare il teorema di Mills.

Il valore della costante, approssimata a 20 cifre decimali, è

$$\theta = 1,30637788386308069046\dots$$

(Sequenza A051021 dell'OESIS).

I numeri primi generati dalla costante di Mills sono invece

$$2, 11, 1361, 2521008887\dots$$

(Sequenza A051245 dell'OESIS) e sono chiamati primi di Mills... Non si conosce una formula chiusa per la costante

di Mills... è possibile dare un'approssimazione maggiormente precisa di θ , tramite

$$\Theta = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3^n p}$$

(da Wikipedia, "Costante di Mills")

“Attualmente non è stata trovata alcuna formula “chiusa” per la costante di Mills. Per lo sviluppo 1,306377883863080690461 le migliori “FRAZIONI GENERATRICI” che ho trovato sono le seguenti:

$$3.540.326.840 / 2.710.032.743$$

$$554.279.518.193 / 424.287.279.385$$

Per lo sviluppo più completo 1,30637788386330806904686144926026 la migliore “FRAZIONE GENERATRICE” è:
 126.931.350.430.746.649 / 97.162.813.301.308.241
 Considerata a tutti gli effetti come formula chiusa semplice senza operatori avanzati” (Giovanni Di Maria).

Facciamo ora qualche esempio, usando per brevità solo i primi cinque decimali

$$\theta = 1,30637$$

eleviamola a 3^n per i successivi quattro valori

$3^n = 3, 9, 27, 81,$ e otteniamo i seguenti valori:

$$\theta^3 = 2,22 \approx 2 \quad \text{primo}$$

$$\begin{aligned} \theta_9 &= 11,08 \approx 11 && \text{primo} \\ \theta_{27} &= 1360,77 \approx 1361 && \text{primo} \\ \theta_{81} &= 2519776847 \approx 2521008887 && \text{primo} \end{aligned}$$

otteniamo prima per lieve eccesso e poi per difetto (a causa delle cinque e poche cifre decimali usate) i quattro numeri primi elencati da Wikipedia e generati dalla costante di Mills usata per intero, o almeno con venti cifre decimali.

Di nuovo notiamo soltanto che tranne il 2 iniziale, tutti gli altri tre numeri primi sono di forma $6k - 1$, poiché:

$$\begin{aligned} 11 &= 6 \times 2 - 1 = 12 - 1 \\ 1361 &= 6 \times 227 - 1 = 1362 - 1 \\ 2\,521\,008\,887 &= 6 \times 420\,168\,148 - 1 = 2\,521\,008\,888 - 1 \end{aligned}$$

Probabilmente questa è una caratteristica comune a tutti i numeri primi originati dalla costante di Mills, si vedrà con ulteriori ricerche (l'altra forma dei numeri primi è $6k + 1$).

Per tutto il resto, rimandiamo alla e voci di Wikipedia “Costante di Mills”, “Teorema di Mills”.(Francesco Di Noto)

Ecco altre costanti generate dal prof. Di Maria, per la forma C^{2^n} :

$$\begin{aligned} C_1) & 1,1151671149562920604 \\ C_2) & 1,1555816792954167749 \end{aligned}$$

- C₃) 1,2951908704013668228
- C₄) 1,1222914179231353593
- C₅) 1,1113550111435730461
- C₆) 1,1366464410255097128

Facciamo qualche esempio con la costante C₃ e per i primi cinque valori di 2ⁿ = 2, 4, 8, 16, 32

C ₃ ²	=	1,67...	≈	2
C ₃ ⁴	=	2,81...	≈	3
C ₃ ⁸	=	7,91...	≈	7
C ₃ ¹⁶	=	62,71...	≈	61
C ₃ ³²	=	3932,60...	≈	3931
...	

Anche questa costante (la più vicina a quella di Mills = 1,30637...), come quella di Mills, genera primi sempre più grandi e sempre più rari, e leggermente approssimati per difetto o eccesso, e così pure tutte le altre del suddetto elenco.

La loro utilità pratica è quindi minima, e servono solo a dimostrare che non esiste una sola costante del genere valida per generare tutti i numeri primi (o almeno loro approssimazioni) nell'ordine in cui li conosciamo, ma soltanto gruppi di primi molto sparsi e sempre più grandi, (come i numeri primi generati dalla costante di Mills o dalle nostre costanti di cui sopra), a causa dei vari gap (distanze) irregolari tra due numeri primi consecutivi: tali gap sono in parte regolati dalla congettura di Cramer, secondo la quale un gap non può superare il quadrato del logaritmo del numero primo minore (Vedi "Soluzione

unificata per alcune congetture...” tra i lavori della Prof. Tulumello)

A cura del prof. Di Maria
DEL GRUPPO ERATOSTENE