

LA FUNZIONE MEDIA DI MERTENS E L'ABBONDANZA DI GOLDBACH

Ing. Rosario Turco, Prof. Maria Colonnese, Gruppo Eratostene

Abstract

In this work, we show some connection between abundance of Goldbach, Mertens' function, Mertens' mean function and forms $6k \pm 1$ of prime numbers

Introduzione

In questo lavoro vedremo di trovare una qualche relazione tra la funzione di Mobius, e soprattutto la funzione cumulativa di Mobius (somma di tutti i valori di $\mu(N)$), e l'abbondanza di Goldbach (Rif.1), partendo dalla funzione $S =$ somma degli inversi dei numeri primi $= \log \log N$, poiché la media funzione cumulativa di Mobius da 1000 000 fino a 10 000 000 è 13 mentre $\log 10\,000\,000$ è 16,11, numero molto vicino a 13 media della funzione Mobius fino a 10 000 000 (Rif.2).

Funzione di Mobius

Riprendiamo dal Rif .2, pag. 98, riprendiamo i valori medi della funzione di Mertens $M'(N)$ per alcune potenze di 10, e aggiungiamo un'altra stima, ora logaritmica, e vedremo come la media aritmetica tra le due stime si avvicina ai valori reali,

n	N = 10 ⁿ	stima $\sqrt[8]{10^n}$	stima ln(10 ⁿ)	media aritm.stime	valori reali
1	10	1,33	2,30	1,815	-1,1
2	100	1,77	4,60	3,185	-1,84 (Nota 1)
3	1000	2,37	6,90	4,635	?*
4	10000	3,16	9,21	6,185	5,4
5	100000	4,21	11,51	7,860	?
6	1000000	5,62	13,81	9,715	?
7	10000000	7,49	16,11	11,800	13,6
8	100000000	10	18,42	14,21	?
9	1000000000	13,33	20,72	17,025	?
10	10000000000	17,78	23,02	20,04	?
...

* valori non citati dal libro “L’ossessione dei numeri primi” di John Derbyshire, fonte dei valori reali (vedi Rif.2).

Se vogliamo usare $\log \log(10^n)$, con la formula:

$$M'(10^n) \sim \log \log (10^n) * (n+1)/2 \quad (1)$$

abbiamo i seguenti valori per le tre potenze di 10 di cui conosciamo i valori reali:

per 10¹, M'(10¹) = 0,83 ~ -1,2 valore reale

per 10², M'(10²) = 2,29 ~ -1,84 valore reale

per 10⁴, M'(10⁴) = 5,55 ~ 5,4 valore reale

per 10⁷ M'=(10⁷) = 11,11 ~ 13,6 valore reale

per 10¹⁰ si prevede $M'(10^{10}) = 3,13 * 5,5 = 17,215$ circa il valore reale, per

difetto (come 11,11 per N=10⁷), punto dal quale la stima sembra leggermente inferiore al valore reale). Ulteriori ricerche e calcoli ci diranno quale potrebbe

essere la formula più vicina a quella che da i valori reali, o almeno quelli più vicini.

Notiamo che la media aritmetica tra le stime logaritmiche di 10² e 10³,

e cioè $(4,60 * 6,90) / 2 = 5,75$ è molto vicina al valore reale 5,4 per 10⁴ = 10000, come

pure che la stima logaritmica 13,81 per 10⁶ è molto vicina al valore reale 13,6 per

10^7 , fenomeno numerico che si potrebbe verificare anche per altri valori di 10^n successivi: per esempio per 10^9 il valore reale potrebbe essere molto vicino a 18,42, per 10^{10} il valore reale potrebbe essere molto vicino a 20,72, ecc. Osservazione da verificare meglio in futuro.

Conclusioni provvisorie

Come si vede, per $N = 10^n$ sempre più grandi, e per estensione anche per tutti gli N sempre più grandi, la funzione media Mertens $M'(N)$ cresce molto lentamente (per esempio con la (1), che si rifà alla funzione S somma degli inversi di tutti i numeri primi precedenti, e che sembra connessa alla RH (per $N = 10^{10^{10000}}$ tale funzione S raggiunge il valore 100, e qualche zero della funzione zeta potrebbe non essere più sulla retta critica $\frac{1}{2}$, ma non è ancora certo). Ciò vuol dire che nella funzione Mobius $\mu(n)$ prevale in quantità molto piccola il segno $+1$, il che significa che sono leggermente superiori i numeri per i quali tale funzione vale $+1$, e cioè per i numeri scomponibili in un numero pari di fattori primi distinti, compreso 1 (scomponibile in 0 fattori primi, e considerando 0 numero pari – vedi voce “Funzione di Mobius” di Wikipedia).

Sarebbe insomma qualche fenomeno numerico analogo alla faccenda fisica della materia e dell'antimateria: il risultato dell'annichilazione reciproca tra particelle ed antiparticelle dovrebbe essere zero, ma qualcosa non funziona bene (ma i fisici lo sanno bene) e la materia (designiamola col segno $+$) ha alla fine un lievissimo sopravvento sulla parità 0, e rende possibile l'esistenza di questo mondo.

Potrebbero esserci connessioni matematiche profonde tra i due fenomeni? Con o senza il coinvolgimento delle teorie di stringa? Già Goldbach è connesso con la RH, e questa con le teorie di stringa.

Occorrerebbe ora una connessione più precisa tra Goldbach e Mertens, tramite La funzione $S_n \sim \log \log(N)$, visto che anche la funzione di Mobius $\mu(n)$ è connessa anche con la RH (Rif.2)

Circa il legame con l'abbondanza di Goldbach (Rif.1), per il momento entrambe le funzioni $G(p\#)$ e $M'(N)$ hanno in comune la componente logaritmica $\log \log(N)$ nelle rispettive stime logaritmiche : abbondanza di Goldbach per $p\# = r \sim 2 \log \log(p\#)$ nel primo caso, e funzione media Mertens $M'(n) \sim \log \log(10^n)^{(n+1)/2}$ nel secondo. Ulteriori ed altre eventuali relazioni saranno esaminate in seguito.

Riferimenti

- 1) "L'abbondanza di Goldbach"
- 2) "Sulle spalle dei giganti", capitolo sulla funzione di Mertens

Caltanissetta 1.8.2010

NOTA 1 Dalla voce di Wikipedia "[Funzione di Mertens](#)":

I primi valori sono dati dalla seguente tavola

$M(n)$	+1	+2	+3	+4	+5	+6	+7	+8	+9	+10	+11	+12	+13	+14	+15	+16	+17	+18	+19	+20
0+	1	0	-1	-1	-2	-1	-2	-2	-2	-1	-2	-2	-3	-2	-1	-1	-2	-2	-3	-3
20+	-2	-1	-2	-2	-2	-1	-1	-1	-2	-3	-4	-4	-3	-2	-1	-1	-2	-1	0	0
40+	-1	-2	-3	-3	-3	-2	-3	-3	-3	-3	-2	-2	-3	-3	-2	-2	-1	0	-1	-1
60+	-2	-1	-1	-1	0	-1	-2	-2	-1	-2	-3	-3	-4	-3	-3	-3	-2	-3	-4	-4
80+	-4	-4	-3	-4	-4	-3	-2	-1	-2	-2	-1	-1	0	1	2	2	1	1	1	1

(Valori della funzione Mertens fino a 100, con media $-1,84 = -184/100$)

Un'idea della lenta crescita del codominio della $M(n)$ al crescere di n è data dai primi termini della successione dei valori $M(10^k)$, successione reperibile in [OEIS](#) in corrispondenza della sigla [A084237](#) i cui valori per $k = 0, 1, \dots, 16$ sono

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$M(10^k)$	1	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{212}{212}$	$\frac{1037}{1037}$	$\frac{1928}{1928}$	$\frac{222}{222}$	$\frac{33722}{33722}$	$\frac{87856}{87856}$	$\frac{62366}{62366}$	$\frac{599582}{599582}$	$\frac{875575}{875575}$	$\frac{3216373}{3216373}$	$\frac{3195437}{3195437}$	

Disponendo i primi 43 numeri naturali (tranne l'1 iniziale) in sei colonne, si può

Trovare qualche nesso con le forma $6k$, visto che la forma $6k \pm 1$ è la forma aritmetica generale dei numeri primi (tranne il 2 e il 3); accanto ad ogni numero, e in rosso, il valore della sua funzione $M(n)$ o Mobius cumulativa (in **blu** i numeri primi):

k		$6k-4$	$6k-3$	$6k-2$	$6k-1$	$6k$	$6k+1$
1	(1, 1)	2,0	3,-1	4,-1	5,-2	6,-1	7,-2
2		8,-2	9,-2	10,-1	11,-2	12,-2	13,-3
3		14,-2	15,-1	16,-1	17,-2	18,-2	19,-3
4		20,-3	21,-2	22,-1	23,-2	24,-2	25,-2
5		26,-1	27,-1	28,-2	29,-2	30,-3	31,-4
6		32,-4	33,-3	34,-2	35,-1	36,-1	37,-2
7		38,-1	39, 0	40, 0	41,-2	42,-1	43,-3
	

La somma s dei vari valori per ogni colonna è, rispettivamente:

- 13 - 10 - 8 - 13 - 12 - 19

con valori assoluti più alti nella sesta colonna ($6k+1$) e più bassi nella terza ($6k-2$)

con rispettive medie $s/7$ di :

-1,8 -1,4 -1,1 -1,8 -1,7 -2,7

La somma totale delle somme parziali è **-75**, con somma s media = $-75/7 = -12,5$

Non è molto, ma è già qualcosa, che si potrebbe approfondire in seguito, continuando la tabella di cui sopra fino a valori di k più alti: l'andamento identificato (valori mediamente più per numeri naturali di forma $6k+1$; se così fosse in realtà, la funzione di Mertens “preferirebbe” tale forma numerica, a spese soprattutto della forma $6k-2$, che ha i valori più bassi, almeno fino ad $n = 43$. E questa **nostra congettura**, che chiameremo **funzione di Mertens $M(6k+1)$** , se in seguito verificata anche per valori di k molto più alti, potrebbe essere usata per le ipotesi RH equivalenti già note (per es. la RH2, vedi Rif. 2 pag. 50 già connessa alla funzione $\mu(n)$ e quindi anche alla funzione di Mertens $M(n)$ e alla nostra funzione media di Mertens $M'(n)$); o anche per nuove ipotesi RH equivalenti da proporre in base a quanto sopra.

Riferimenti

- 1) “Abbondanza di Goldbach”, e “Nuova relazione di Godbach e abbondanza di Goldbach” in sezione “Articoli su Goldbach”, esul nostro sito www.gruppoeratostene.com
- 2) “Sulle spalle dei giganti”, in sezione “Articoli sulla Teoria dei Numeri”, idemG

Caltanissetta 1.8.2010