LA FUNZIONE σ(n) , LE FORME 6k ± 1 E LA RH1

Gruppo Eratostene

Abstract

In this paper we will show some connections between σ(n)

function , forms 6± 1 of prime numbers, and the Rh - equivalent hypothesis RH1

Riassunto

In questo lavoro mostreremo le connessioni tra la funzione σ(n), le forme 6k+1 dei numeri primi e l'ipotesi RH equivalente nota come RH1. Questo articolo è a completamento dei lavori precedenti sulla funzione μ(n) connessa alla M(n) (Rif. 1 e Rif. 2) e alla RH2, e sulla funzione totiente φ(n) (Rif. 3)

Introduzione

Con questo lavoro terminiamo la serie di articoli sulla possibile connessione aritmetiche 6k ± 1 dei numeri primi (tranne il 2 e il 3 iniziali), alcune funzioni numeriche (φ(n), μ(n) e σ(n)), le rispettive ipotesi RH equivalenti e anche con la funzione zeta ς(z) e l'ipotesi di Riemann; questo lavoro è dedicato alla funzione σ(n) e alla RH1, già trattata in precedenti lavori (Rif. e altri) 1)

Da "Numero abbondante", Wikipedia:

" Un **numero abbondante** è un numero naturale minore della somma dei suoi divisori interi (escludendo sé stesso).

Per esempio, 12 è un numero abbondante perché è inferiore alla somma dei suoi divisori: (1+2+3+4+6)=16.

I primi numeri abbondanti sono: 12, 18, 20, 24, 30. Il primo numero dispari abbondante è 945.

Tutti i multipli interi dei numeri abbondanti e dei numeri perfetti sono a loro volta numeri abbondanti. "

Da qui il concetto di abbondanza, ossia il rapporto tra la somma divisori di n ed n stesso

$$Abb = \sigma(n) / n$$

Che possiamo constatare meglio osservando la successiva Tavola dei divisori, alla quale seguirà una Tabella con la connesione tra abbondanza e multipli di 6 (che contengono anche primoriali p# e fattoriali n!, questi ultimi connessi, come vedremo, alla RH1 (Rif 8, 9, e 10):

Tavola divisori , da Wikipedia:

La tavola seguente lista tutti i divisori dei numeri da 1 a 1000.

Un **divisore** di un *n* intero è un numero intero *m* espressa, per questo, con *n*/*m* che è di nuovo un numero intero (il quale è necessariamente anche un divisore di *n*). Per esempio, 3 è un divisore di 21, poiché 21/3 = 7 (e 7 è anche un divisore di 21).

Se *m* è un divisore di *n* così allora lo è −*m*. La tavola seguente lista solo i divisori positivi.

Legenda della tavola [modifica]

- $d(n)$ è il numero dei divisori positivi di n, compreso 1 e n stesso
- $\sigma(n)$ è la somma di tutti i divisori positivi di n, compreso 1 e n stesso
- $s(n)$ è la somma dei divisori propri di $s(n) = n$; gli unici numeri perfetti tra 1 e 1000 sono 6, 28 e 496

- I numeri amicabili e i numeri sociable sono numeri dove la somma dei loro
- divisori propri formano un ciclo; gli unici esempi sotto il 1000 sono 220 e 284
- un numero difettivo è più grande della somma dei suoi divisori propri; cioè, $s(n) < n$
- un numero abbondante è più piccolo della somma dei suoi divisori propri; cioè, $s(n) > n$
- un numero primo ha come divisore solo 1 e sé stesso; cioè, $d(n) = 2$. I numeri primi sono sempre difettivi".

Tavola parziale (fino a n = 60, sufficiente al nostro scopo)

"Divisori dei numeri da 1 a 100 [modifica]

n	Divisori	*d*(*n*)	σ(*n*)	*s*(*n*)	Note
1	1	1	1	0	difettivo
2	1, 2	2	3	1	difettivo, primo
3	1, 3	2	4	1	difettivo, primo
4	1, 2, 4	3	7	3	difettivo
5	1, 5	2	6	1	difettivo, primo
6	1, 2, 3, 6	4	12	6	perfetto
7	1, 7	2	8	1	difettivo, primo
8	1, 2, 4, 8	4	15	7	difettivo
9	1, 3, 9	3	13	4	difettivo
10	1, 2, 5, 10	4	18	8	difettivo
11	1, 11	2	12	1	difettivo, primo
12	1, 2, 3, 4, 6, 12	6	28	16	abbondante
13	1, 13	2	14	1	difettivo, primo
14	1, 2, 7, 14	4	24	10	difettivo
15	1, 3, 5, 15	4	24	9	difettivo
16	1, 2, 4, 8, 16	5	31	15	difettivo
17	1, 17	2	18	1	difettivo, primo
18	1, 2, 3, 6, 9, 18	6	39	21	abbondante
19	1, 19	2	20	1	difettivo, primo
20	1, 2, 4, 5, 10, 20	6	42	22	abbondante
n	**Divisori**	*d*(*n*)	σ(*n*)	*s*(*n*)	**Note**
21	1, 3, 7, 21	4	32	11	difettivo
22	1, 2, 11, 22	4	36	14	difettivo

23	1, 23	2	24	1	difettivo, primo
24	1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24	8	60	36	abbondante
25	1, 5, 25	3	31	6	difettivo
26	1, 2, 13, 26	4	42	16	difettivo
27	1, 3, 9, 27	4	40	13	difettivo
28	1, 2, 4, 7, 14, 28	6	56	28	perfetto
29	1, 29	2	30	1	difettivo, primo
30	1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30	8	72	42	abbondante
31	1, 31	2	32	1	difettivo, primo
32	1, 2, 4, 8, 16, 32	6	63	31	difettivo
33	1, 3, 11, 33	4	48	15	difettivo
34	1, 2, 17, 34	4	54	20	difettivo
35	1, 5, 7, 35	4	48	13	difettivo
36	1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36	9	91	55	abbondante
37	1, 37	2	38	1	difettivo, primo
38	1, 2, 19, 38	4	60	22	difettivo
39	1, 3, 13, 39	4	56	17	difettivo
40	1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40	8	90	50	abbondante
n	**Divisori**	***d*(*n*)**	**Σ(*n*)**	***s*(*n*)**	**Note**
41	1, 41	2	42	1	difettivo, primo
42	1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42	8	96	54	abbondante
43	1, 43	2	44	1	difettivo, primo
44	1, 2, 4, 11, 22, 44	6	84	40	difettivo
45	1, 3, 5, 9, 15, 45	6	78	33	difettivo
46	1, 2, 23, 46	4	72	26	difettivo
47	1, 47	2	48	1	difettivo, primo
48	1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48	10	124	76	abbondante
49	1, 7, 49	3	57	8	difettivo
50	1, 2, 5, 10, 25, 50	6	93	43	difettivo
51	1, 3, 17, 51	4	72	21	difettivo
52	1, 2, 4, 13, 26, 52	6	98	46	difettivo
53	1, 53	2	54	1	difettivo, primo
54	1, 2, 3, 6, 9, 18, 27, 54	8	120	66	abbondante
55	1, 5, 11, 55	4	72	17	difettivo
56	1, 2, 4, 7, 8, 14, 28, 56	8	120	64	abbondante
57	1, 3, 19, 57	4	80	23	difettivo

58	1, 2, 29, 58	4	90	32	difettivo
59	1, 59	2	60	1	difettivo, primo
60	1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60	12	168	108	abbondante

.. … … … … …

Come si nota facilmente, per i numeri n multipli di 6, e quindi di forma n = 6k, il rapporto tra σ(n) ed n (e quindi l'abbondanza) è più elevata che per altri numeri; mentre è minima per i numeri primi, e prossima a 1, poiché σ(p) = p + 1 e quindi σ(p)/p = p+1/p > 1, leggermente maggiore di 1, per esempio per p = 59, abbiamo 59+1/59= 60/59= 1,0169491 ; abbondanza, quindi, massima per i numeri n = 6k e minima per i numeri primi; tutti gli altri n hanno abbondanza intermedia, per es. per n = 55, σ(55) = 72 e abb = 72/55= 1,3090909, mentre per i numeri perfetti abb è sempre uguale a 2, per esempio per n = 6, abbiamo 12/6 = 2 e per 28 abbiamo 56/28 = 2.

TABELLA sulla connessione 6k e abb massima :

N	6k	abb = σ(n)/n
6	6*1	12/6 = 2
12	6*2	28/12 = 2,33…
18	6*3	39/18 = 2,16…
24	6*4	60/24 = 2,5
30	6*5	72/30 = 2,4
36	6*6	91/36 = 2,52…
42	6*7	96/42 = 2,28…
48	6*8	124/48 = 2,58…
54	6*9	120/54 = 2,22…
60	6*10	168/60 = 2,8

Come si nota facilmente, confrontando questa tabella con la successiva, l'abbondanza è massima per i valori di n = 6k, e minima per i valori di n=6k±1

Altra tabella con le forme numeriche 6k±1 per i primi 10 valori di k

Per k = 1,2,3,4,5,6,7,8, 9,10	idem	Idem	Idem
n	6k-1 abb	**6k abb**	6k+1 abb
5	**5** 6/5 = **1,2**	**6** 12/6 = **2**	**7** 8/7 = **1,14**
11		**12** 28/12= **2,33**	**13** 14/13=**1,07**
17	**17** 18/17=**1,05**	**18** 39/18 =**2,16**	**19** 20/19 =**1,05**
23	**23** 24/23 = **1,04**	**24** 60/24 = **2,5**	25 31/25=1,24
29	**29** 30/29 = **1,03**	**30** 72/30 =**2,4**	**31** 32/31= **1,03**
35	**35** 48/35=1,37	**36** 91/36=***2,52***	**37** 38/37=**1,02**
41	**41** 42/41= **1,02**	**42** 96/42= **2,28**	**43** 44/43 =**1,02**
47	**47** 48/47=**1,02**	**48** 124/48=**2,58**	**49** 57/49=**1,16**
53	**53** 54/53=**1,01**	**54** 120/54=**2,22**	55 72/55 =**1,30**
59	**59** 60/59=**1,01**	**60** 168/60=**2,8**	**61** 62/61 =**1,01**
…	…	…	…

Come si nota facilmente in entrambe le tabelle, il valore di abb cresce sempre più, sia pure con qualche lieve irregolarità. Per i numeri primi, abb tende a **1** al crescere di p, mentre per i numeri composti è leggermente maggiore, e per i multipli di 6 cresce più velocemente che negli altri numeri di diversa forma numerica.

La funzione σ(n) e quindi anche la maggiore abbondanza per i numeri n di forma 6k è connessa all'ipotesi equivalente RH1 , per la quale rimandiamo al Rif. 5, poiché L(n) è sempre maggiore di σ(n), e il contro esempio L(n) ≤ 0 è impossibile. Quindi abbiamo RH = RH1, essendo le due ipotesi equivalenti. Se è vera la seconda, come abbiamo dimostrato è vera anche la prima. Vediamo la RH1 più in dettaglio, da

Rif. 4, pag.49 (RH1), pag.76 (relazione con la congettura di Goldbach), pag. 93 (grafico di tipo comet per la funzione L(n))

Conclusioni

Concludendo, possiamo dire, anche leggendo i precedenti articoli su tali connessioni (Rif. 1 , 2 e 3), che tutte le tre funzioni considerate $\mu(n)$, $\varphi(n)$ e $\sigma(n)$, che esse sono tutte e tre (quattro con la funzione $\varsigma(z)$) connesse alle forme 6k e 6k $\pm$ 1, assumendo valori massimi con la prima e la terza , minimi per la seconda e la quarta, rispetto alle forme 6k, e viceversa per le forme 6k$\pm$1 (solo la funzione zeta non ha valori per ogni singolo n, ma si basa su tutti i numeri primi, di forma 6k$\pm$1) . Ed anche, considerato che il grafico comet della funzione L(n) (Rif . pag.93) dimostra l'equivalenza tra RH1 ed RH; cosi come il grafico simile della funzione Goldbach dimostra la verità della congettura (contro esempio G(N) = 0 simile al contro esempio della RH1 ($L(n) \leq 0$) ed entrambi fuori dal grafico, pensiamo che anche gli altri grafici per le altre funzioni, essendo simili (di tipo comet, cioè a forma di cometa) possano dimostrare anch'essi, sia pure indirettamente la verità delle rispettive ipotesi RH equivalenti (per es. la RH2 per la funzione $\mu(n)$ tramite la collegata funzione di Mertens (Rif.1), e quindi, di conseguenza anche la RH, essendo RH1 = RH, RH2 = RH, e così via. In un prossimo lavoro riporteremo tutti i grafici di tipo comet interessati, sia per le tre funzioni $\varphi(n)$, $\mu(n)$ e $\sigma(n)$, sia anche per la funzione di Goldbach, connessa alla RH1 per similitudine (valori massimi per i valori di N=6k, similitudine per il contro esempio: per $L(n) \leq 0$, il contro esempio è uguale o minore di zero, per Goldbach, G(N) = 0, invece il contro esempio è invece soltanto zero. Nei suddetti grafici, un contro esempio all'interno dei medesimi renderebbe falsa la relativa congettura; mentre viceversa, tutti i possibili contro esempi fuori dal grafico, per esempio sull'asse x come per Goldbach, rende vere le relative congetture (i contro esempi sono sempre più lontani dai valori minimi del grafico (che giacciono sulla curva inferiore).

Riferimenti

1)"La funzione media di Mertens e l'abbondanza di Goldbach" Ing. Rosario Turco, Prof. Maria Colonnese, Gruppo Eratostene

2) "I numeri nontotienti e noncototienti" Gruppo Eratostene

3) "Funzione totiente ed RH" Gruppo Eratostene, tutti e tre in sezione "Articoli su Riemann" del nostro sito www.gruppoeratostene.com in sezione "Articoli su Riemann"

4)Sulle spalle dei giganti" in sezione"Articoli sulla Teoria dei Numeri"

5) "Dai multipli di 6 alla Riemann Hypothesis" in sezione "Articoli su Riemann"

6) Blog Matematico" del Prof. Umberto Cerruti.

7) "Andamento ciclico dei fattori" in Sezione "Articoli sulla Fattorizzazione"

8) "L' equivalenza di Lagarias RH1 = RH esaminata con i soli numeri fattoriali n = k ! Francesco Di Noto e Michele Nardelli1,2" sul sito http://xoomer.alice.it/stringtheory

9) P R O P O S T A D I D I M O S T R A Z I O N E

D E L L A V A R I A N T E R I E M A N N D I L A G A R I A S

(RH1) (Ed equivalente all'ipotesi di Riemann RH, con RH1 = RH)

Francesco, sul sito e Michele Nardelli [1,2] sul sito http://xoomer.alice.it/stringtheory

10) "Sulle congetture equivalenti all'ipotesi di Riemann (RH1, RH2, RH3, RH4) e relative funzioni (Proposte, osservazioni, tabelle, calcoli, ecc.)" Gruppo Eratostene, sul sito http://xoomer.alice.it/stringtheory

Caltanissetta 15.11.2010