

Il binomio di Newton
Nota sul calcolo esatto dei suoi coefficienti

Sommario: in questa nota viene illustrato il calcolo dei coefficienti del binomio di Newton $(a + b)^n$ con l'ausilio di due diversi algoritmi: uno utilizzando la nota formula relativa al coefficiente: $C_{n,k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, l'altro facente riferimento alla formula ricorsiva

$C_{n,k} = C_{n-1,k-1} + C_{n-1,k}$. Per avere risultati concreti si mostrano quattro programmi realizzati in Qbasic, atti a trovare il valore numerico esatto di questi coefficienti. I primi due fanno riferimento al 1° Algoritmo e sono relativi, uno al calcolo di tutti i coefficienti per un qualsiasi $n \leq 40$; l'altro preposto al calcolo, con l'utilizzo di un'aritmetica a precisione multipla, di un solo prefissato coefficiente alla volta anche per valori elevati di n e k . Gli altri due programmi sfruttano il 2° tipo di algoritmo: il primo riguarda il calcolo di tutti i coefficienti per un qualsiasi esponente $n \leq 50$; il secondo infine con l'utilizzo sempre di un'aritmetica a precisione multipla riguarda di nuovo il calcolo di tutti o di una parte scelta dei coefficienti, ma per un qualsiasi esponente $n \leq 400$.

In coda all'articolo sono riportati alcuni esempi di risultati di calcolo.

Abstract: in this short paper we illustrate the computation of binomial coefficients by two different algorithms: the one using the well-known formula $C_{n,k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, the other with

reference to recursive formula $C_{n,k} = C_{n-1,k-1} + C_{n-1,k}$. We show the actual results by four programs, fulfilled in Qbasic language. The first is able to find the exact numerical value of coefficients for the exponent values until $n = 40$, the second concern the computation for a single coefficient, but as well for high values of n and k by using a multiple – precision arithmetic.

The third and the fourth programs regard the 2nd Algorithm and are able to find respectively the exact coefficients values until $n = 50$, and the exact coefficients computation, but for the n values until 400 by using a multiple – precision arithmetic. To the tail end we report some example of computation results.

Per il calcolo del valore numerico dei coefficienti relativi al binomio $(a + b)^n$, conosciuto come binomio di Newton⁽¹⁾ si può procedere attraverso due distinti algoritmi.

1° Algoritmo

Questo algoritmo prende in considerazione il ben noto sviluppo del binomio:

$$(a + b)^n = \sum_k^n C_{n,k} \cdot a^k \cdot b^{n-k} \quad \text{con } k = 0, 1, 2, \dots, n$$

e dove il generico coefficiente è $C_{n,k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ (1)

Per convenzione si ha: $k! = 1$ per $k = 0$ e $k! = 1$ per $k = 1$

Inoltre: $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-2) \times (n-1) \times n$

$k! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (k-2) \times (k-1) \times k$

$(n-k)! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-k-2) \times (n-k-1) \times (n-k)$

(1): vi sono vari siti su Internet riguardanti questo argomento; si vedano ad esempio quelli citati nei Riferimenti.

Il valore $C_{n,k}$ è importante nel calcolo combinatorio [4], [5], [6] in quanto esso indica, dato un insieme n di elementi, il numero delle combinazioni semplici a k a k (con $k \leq n$) di questi n elementi, vale a dire il numero di gruppi di k elementi scelti fra gli n elementi dell'insieme tali che, come esposto chiaramente in [4] o [5]:

- in ogni gruppo gli elementi non si possono ripetere, (ad esempio per $k = 3$ il gruppo AAB non è un gruppo valido)
- i gruppi non differiscono per l'ordine degli elementi, (ad esempio per $k = 3$ i gruppi ABC e ACB sono da considerarsi un unico gruppo).

Per trovare il valore numerico di ogni coefficiente occorre effettuare il calcolo dei suddetti fattoriali. Si può però semplificare il calcolo ed avere sia il minor numero possibile di operazioni elementari di moltiplicazione da eseguire sia anche un denominatore il più piccolo possibile ponendo:

$$\text{per } k < \frac{n}{2} \quad C_{n,k} = \frac{(n-k+1) \cdot (n-k+2) \cdot (n-k+3) \cdot \dots \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n}{k!} \quad (2)$$

$$\text{per } k \geq \frac{n}{2} \quad C_{n,k} = \frac{(k+1) \cdot (k+2) \cdot (k+3) \cdot \dots \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n}{(n-k)!} \quad (3)$$

Una volta calcolati il valore del numeratore e del denominatore della (2) o della (3) si dovrà eseguire la divisione fra questi due valori. L'utilizzo delle due suddette formule al posto della (1) riduce drasticamente il numero delle moltiplicazioni elementari da eseguire. Inoltre con la riduzione del valore numerico sia del loro numeratore che del loro denominatore si ottengono risultati più precisi. Si può constatare che fino ad un esponente $n = 40$ del binomio si ottengono risultati esatti nel calcolo del valore numerico di ogni di ogni coefficiente $C_{n,k}$ ⁽²⁾ utilizzando l'aritmetica a doppia precisione disponibile sul PC in ogni linguaggio evoluto.

Ma già per $n > 53$ i valori dei $C_{n,k}$ cominciano ad avere valori errati sulla cifra delle unità e per valori di $n > 56$ man mano che l'esponente n aumenta un sempre maggior numero di risultati numerici per i valori dei $C_{n,k}$ vengono espressi in notazione con mantissa ed esponente.

Esempio $C_{58,24} = 1.283220571399357D+16$.

Questo tipo di algoritmo non risulta particolarmente conveniente qualora si volessero calcolare in sequenza tutti i coefficienti per un esponente n grande in quanto sarebbe necessario eseguire fra numeri composti anche da decine di cifre almeno $\frac{n}{2}$ divisioni, operazioni queste particolarmente complicate quando si fa uso di una necessaria aritmetica a precisione multipla. Il secondo algoritmo proposto risulta invece più idoneo a questo scopo per una programmazione riguardante una aritmetica a precisione multipla in quanto per esso si utilizzano solo operazioni di addizione e di sostituzione.

(2) Può essere di qualche interesse conoscere di quante cifre è composto un coefficiente di valore molto elevato. Posto $C_{n,k} = 10^x$ si ha

$$x = \log(C_{n,k}). \text{ Per la formula (1) e per le proprietà dei logaritmi si trae } x = \sum_{a=2}^n \log a - \sum_{b=2}^k \log b - \sum_{c=2}^{n-k} \log c.$$

Il numero nc di cifre che compongono $C_{n,k}$ è dato allora da $nc = \lceil x \rceil$: tale valore può essere poi trovato con questo programma:

```

REM Calcolo del numero di cifre del coefficiente binario n!/[k!*(n-k)!]
CLS : DEFDBL A-Z: INPUT "n"; n: INPUT "k"; k
a = 0: b = 0: c = 0: h = 1
DO: h = h + 1: a = a + LOG(h)
    IF h = k THEN b = a
    IF h = n - k THEN c = a
LOOP UNTIL h = n
a = a / LOG(10): b = b / LOG(10): c = c / LOG(10): x = a - b - c
PRINT "numero nc di cifre del coefficiente C(n,k)="; INT(x) + 1
    
```

Esempio: con detto programma si può ricavare immediatamente che il coefficiente $C_{400,191}$ è composto da 119 cifre.

Si riporta qui di seguito il listato di un semplice programma realizzante l'algoritmo

PROGRAMMA n.1

```
REM -----programma COEFBIN! -----
REM programma relativo al calcolo dei coefficienti
REM relativi al binomio (a+b)^n con la formula
REM C(n,k) = n!/(k!*(n-k)!)
REM con questo programma si ottengono valori esatti
REM dei coefficienti per un n non superiore a 40
REM -----
CLS : DEFDBL A-Z: DIM C(200): INPUT "n"; n
t1 = TIMER
FOR k = 0 TO n: IF k >= n / 2 GOTO 25
  x = 1: FOR h = n - k + 1 TO n: x = x * h: NEXT h
  y = 1: FOR j = 1 TO k: y = y * j: NEXT j
  C(k) = x / y: PRINT "C("; k; ")="; x / y
GOTO nes
25 REM k >= n/2
  x = 1: FOR h = k + 1 TO n: x = x * h: NEXT h
  y = 1: FOR j = 2 TO n - k: y = y * j: NEXT j
  C(k) = x / y: PRINT "C("; k; ")="; x / y
nes: NEXT k
t2 = TIMER - t1: PRINT : PRINT "t2 ="; t2; "sec."
```

Tuttavia questo 1° Algoritmo può essere impiegato utilmente per calcolare un dato coefficiente, ad esempio il coefficiente $C_{n,k}$, senza peraltro passare al calcolo ordinato di tutti i coefficienti relativi ad un valore più piccolo di k , come invece si constaterà per il 2° l'algoritmo che sarà illustrato più avanti. Ciò risulta particolarmente conveniente quando sia n che k sono grandi o molto grandi. Pertanto, utilizzando la formula (2) o la formula (3) si può realizzare un programma (ad esempio il PROGRAMMA n°2 in linguaggio Qbasic riportato nel relativo sottostante riquadro), con cui, effettuando le necessarie operazioni di moltiplicazione e di divisione tramite l'impiego di un'aritmetica a precisione multipla, si riesce a trovare in tempi di calcolo brevi il valore numerico esatto del coefficiente relativo ad un n ed un k prefissati e relativamente elevati. Un esempio di risultato ottenibile con l'uso di questo programma, come compare sullo schermo del monitor, viene riportato qui di seguito:

**calcolo in aritmetica a precisione multipla
del coefficiente binomiale $C(n,k) = n!/(k!*(n-k)!)$**

introdurre il numero n : 2100

introdurre il numero k : 923

**C (2100 , 923) = 524119156798041200332550631685181504697084587934172144400
55822999726530659512454116767051029967919507086969163368071030661198777590722
34974893670139028760671467184470414153632611805176811993288407372739922578158
72407181052000900113962883332419329395160207596157401367660138962574462067422
39517931295462517102187778127403078288719542299220020357402813890233270179883
14569290982673501764147985198521356520795413777295469464933293758748116531522
81826078208379507474948339283563196093404236149353789612771764258118020824420
40422269149268757298815612419892661443178480068420871204247630833069584609194
3721908377225579420601824000**

**il valore trovato di C (2100 , 923) è corretto ed è formato da 624 cifre
tempo impiegato: 0.49 secondi**

PROGRAMMA n.° 2

```

REM programma COEFBIA!
CLS : DEFDBL A-Z
PRINT "calcolo in aritmetica a precisione multipla"
PRINT "del coefficiente binomiale C(n,k) = n!/(k!(n-k)!)"
PRINT "-----"
INPUT "introdurre il numero n : ", n: PRINT
INPUT "introdurre il numero k : ", k: PRINT
t1 = TIMER: DIM a(1000), b(1000), r(1000), qz(1000)
g = 7: pr = 10 ^ g: a(0) = 1: b(0) = 1: k1 = k
IF k >= n / 2 THEN k = n - k
v = 0: y = n - k + 1
FOR h = y TO n: q = 0
  FOR j = 0 TO v
    x = a(j) * h + q: q = INT(x / pr): a(j) = x - q * pr
  NEXT j
  IF q > 0 THEN v = v + 1: a(v) = q
NEXT h
ca = v: v = 0: ' FOR l = ca TO 0 STEP -1: PRINT a(l); : NEXT l
FOR h = 2 TO k: q = 0
  FOR j = 0 TO v
    x = b(j) * h + q: q = INT(x / pr): b(j) = x - q * pr
  NEXT j
  IF q > 0 THEN v = v + 1: b(v) = q
NEXT h
cb = v: ' FOR l = cb TO 0 STEP -1: PRINT b(l); : NEXT l
REM -----DIVISIONE-----
div: FOR k = ca TO 0 STEP -1: r(k) = a(k): NEXT k
d = b(cb) + 1: IF cb = 0 THEN d = d - 1
FOR h = ca TO cb + 1 STEP -1: a = r(h): sv = cb
  IF a < d THEN a = r(h) * pr + r(h - 1): sv = cb + 1
  qz = INT(a / d): qz(h - sv) = qz(h - sv) + qz: 'sm = 0
  FOR k = 0 TO cb
    x = qz * b(k) + r: r = INT(x / pr): z = x - r * pr: s = k + h - sv
    IF z > r(s) THEN r(s) = pr + r(s): r(s + 1) = r(s + 1) - 1
    r(s) = r(s) - z
  NEXT k
  r(h) = r(h) - r: r = 0: IF r(h) <> 0 THEN h = h + 1
NEXT h
trovar: FOR j = cb TO 0 STEP -1
  IF r(j) < b(j) THEN j = 0: GOTO resto
  IF r(j) > b(j) THEN j = 0: GOTO continua
NEXT j
continua: r = 0: d = b(cb) + 1: IF r(cb) = b(cb) THEN d = b(cb)
  qz = INT(r(cb) / d): qz(0) = qz(0) + qz: 'ss = 0
FOR j = 0 TO cb
  x = qz * b(j) + r: r = INT(x / pr): z = x - r * pr
  IF z > r(j) THEN r(j) = pr + r(j): r(j + 1) = r(j + 1) - 1
  r(j) = r(j) - z
NEXT j
IF r(cb) > 0 GOTO trovar
resto: FOR j = cb TO 0 STEP -1
  IF r(j) > 0 THEN crt = j: j = 0
NEXT j
cqz = ca - cb: IF qz(cqz) = 0 THEN cqz = cqz - 1
rs = 0: FOR k = 0 TO cqz: x = qz(k) + rs: rs = INT(x / pr): qz(k) = x - rs * pr: NEXT k
IF rs > 0 THEN cqz = cqz + 1: qz(cqz) = rs
PRINT : PRINT "C("; n; ", "; k1; ") = "; :
  FOR s = cqz TO 0 STEP -1: IF qz(s) = 0 GOTO ness
  a = qz(s): a$ = STR$(a): lc = LEN(a$) - 1
  c$ = RIGHT$(a$, lc): cz = g - lc: z$ = "":
  IF qz(s) < 10 ^ (g - 1) AND w = 0 GOTO 101
  IF cz = 0 GOTO 101
  FOR k = 1 TO cz: z$ = z$ + "0": NEXT k
101  c$ = z$ + c$: PRINT c$;
  w = w + 1
ness: NEXT s
a = qz(cqz): a$ = STR$(a): lc1 = LEN(a$) - 1
IF crt = 0 AND r(crt) = 0 THEN cc = 1: PRINT : PRINT
IF cc = 1 THEN PRINT "il valore trovato di C("; n; ", "; k1; ") è corretto"
PRINT "ed il numero di cifre che lo compongono S: "; lc1 + cqz * g
tempo: t2 = TIMER - t1: PRINT : PRINT "tempo impiegato: "; t2; "secondi":END

```

Programma in Qbasic per il calcolo in aritmetica a precisione multipla del coefficiente binomiale desiderato

$$C_{n,k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

2° algoritmo

Questo algoritmo fa riferimento al triangolo di Pascal o di Tartaglia.

Per una migliore comprensione di quanto sarà esposto più avanti, si riporta la seguente tabella in cui su di una stessa riga risultano i valori dei coefficienti $C_{n,k}$ relativi ad ogni binomio del tipo $(a+b)^n$ con $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots$

$k \backslash n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	
0	1									1
1	1	1								1 1
2	1	2	1							1 2 1
3	1	3	3	1						1 3 3 1
4	1	4	6	4	1					1 4 6 4 1
5	1	5	10	10	5	1				1 5 10 10 5 1
6	1	6	15	20	15	6	1			1 6 15 20 15 6 1
7	1	7	21	35	35	21	7	1		1 7 21 35 35 21 7 1
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	1 8 28 56 70 56 28 8 1
...
	Triangolo di PASCAL									Triangolo di TARTAGLIA

Osservando i valori dei coefficienti riportati in tabella in relazione al triangolo di Pascal si può riscontrare che su ogni riga, ad esclusione del primo termine e dell'ultimo termine di valore sempre 1, vale almeno per essi la seguente relazione: $C_{n,k} = C_{n-1,k-1} + C_{n-1,k}$

Esempi: $10 = C_{5,2} = C_{4,1} + C_{4,2} = 4 + 6$; $15 = C_{6,4} = C_{5,3} + C_{5,4} = 10 + 5$

$70 = C_{8,4} = C_{7,3} + C_{7,4} = 35 + 35$; $21 = C_{7,5} = C_{6,4} + C_{6,5} = 15 + 6$

Ma la relazione $C_{n,k} = C_{n-1,k-1} + C_{n-1,k}$ è valida per qualsiasi coefficiente come viene dimostrato nel riquadro sottostante:

Verifica della relazione $C_{n,k} = C_{n-1,k-1} + C_{n-1,k}$

$$C_{n,k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{(k+1) \cdot (k+2) \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n}{(n-k)!} = \frac{A \cdot n}{(n-k)!} \quad (8)$$

con $A = (k+1) \cdot (k+2) \cdot \dots \cdot (n-1)$

$$C_{n-1,k-1} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \frac{k \cdot (k+1) \cdot (k+2) \cdot \dots \cdot (n-2) \cdot (n-1)}{(n-k)!} = \frac{k \cdot A}{(n-k)!}$$

$$C_{n-1,k} = \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} = \frac{(k+1) \cdot (k+2) \cdot \dots \cdot (n-2) \cdot (n-1)}{(n-1-k)!} = \frac{A \cdot (n-k)}{(n-1-k)!(n-k)} = \frac{A \cdot (n-k)}{(n-k)!}$$

$$C_{n-1,k-1} + C_{n-1,k} = \frac{k \cdot A}{(n-k)!} + \frac{A \cdot (n-k)}{(n-k)!} = \frac{k \cdot A + n \cdot A - k \cdot A}{(n-k)!} = \frac{n \cdot A}{(n-k)!} \quad (9)$$

Dal confronto della (8) con la (9) risulta valida la suddetta relazione

Tenendo presente pertanto questa relazione si può realizzare un efficiente algoritmo di tipo ricorsivo per il calcolo dei coefficienti binomiali (ad esempio con un programma in linguaggio Qbasic riportato nel sottostante riquadro)

PROGRAMMA n.°3

```

REM ----- programma COEFBINT.BAS -----
REM calcolo dei coefficienti binomiali con
REM formule ricorrenti ricavabili osservando
REM il triangolo di PASCAL; con questo programma
REM si ottengono valori esatti dei coefficienti
REM per un n non superiore a 50

CLS : DEFDBL A-Z
INPUT " esponente n del binomio (a+b)^n "; n
t1 = TIMER
DIM b(n), a(n): a(1) = 1: b(0) = 1

DO
  s = s + 1
  FOR k = 1 TO s: b(k) = a(k - 1) + a(k): NEXT k
  FOR h = 0 TO s: a(h) = b(h): NEXT h

LOOP UNTIL s = n

FOR h = 0 TO n: PRINT h; "; "; b(h): NEXT h
t2 = TIMER - t1: PRINT : PRINT t2; "sec."
END

```

Programma di calcolo dei coefficienti binomiali con formula ricorrente

Tale programma è valido per il calcolo esatto di coefficienti relativi al binomio di Newton $(a+b)^n$ per un valore di n non superiore a 50, in quanto ci si è limitati ad utilizzare in esso l'aritmetica a doppia precisione. Per valori più elevati di n si potrebbero ottenere dei risultati di calcolo arrotondati in diversi coefficienti.

Il listato di un programma sempre in linguaggio Qbasic relativo a questo algoritmo, ma in cui le operazioni aritmetiche sono effettuate utilizzando una aritmetica a precisione multipla in Base 10^7 viene riportato qui di seguito nel riquadro sottostante (PROGRAMMA n°4.)

Con tale programma si è in grado di trovare i valori numerici *esatti* dei coefficienti del binomio di Newton $(a+b)^n$ anche per valori dell'esponente n abbastanza più elevati rispetto ai valori massimi per n relativi agli altri summenzionati programmi ($n < 50$). In effetti con esso si è in grado di calcolare i coefficienti del binomio di Newton per un qualsiasi esponente n sino ad un valore massimo di 400. Questo valore è dovuto alle limitazioni del numero massimo di elementi che può avere una matrice (array a due dimensioni) nel software del linguaggio utilizzato (il Qbasic).

Per valori dell'esponente n non è sempre possibile visualizzare in una sola schermata tutti i coefficienti del binomio specie se n è grande; si può osservare però, che per conoscere il valore numerico di tutti i coefficienti è sufficiente trovare il valore dei primi $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ coefficienti in quanto i restanti coefficienti si possono ricavare facilmente perché vale la seguente uguaglianza:

$$C_{n,k} = C_{n,n-k} \text{ dimostrabile immediatamente se si tiene conto della (1).}$$

PROGRAMMA n° 4

```

REM ----- programma COEFBITP.BAS -----
REM calcolo dei coefficienti binomiali con formule ricorrenti
REM tratte dal (triangolo di PASCAL); si utilizza aritmetica
REM a precisione multipla in Base (Radix) pr=10^7

CLS : DEFDBL A-Z
5 INPUT " esponente n >1 del binomio (a+b)^n "; n0
IF n0 > 400 THEN PRINT " valore di n troppo grande; ridigita": GOTO 5
PRINT "i Coefficienti del binomio (a+b) ^"; n0; "sono i seguenti:"
t1 = TIMER
DIM b(410, 18), a(410, 18): g = 7: pr = 10 ^ g: nj = 4: nk = 0
a(1, 0) = 1: a(2, 0) = 1: n = 1
DO: n = n + 1
  FOR j = 1 TO nj + 1
    FOR k = 0 TO nk: b(j, k) = a(j - 1, k) + a(j, k) + r: r = 0
      IF b(j, k) > pr THEN b(j, k) = b(j, k) - pr: r = 1
    NEXT k
    IF r = 1 THEN nk = nk + 1: b(j, nk) = r
    r = 0
  NEXT j
  FOR h = 1 TO nj + 1:
    FOR s = nk TO 0 STEP -1
      a(h, s) = b(h, s): IF a(h, s) = 0 GOTO nes
nes: NEXT s
    NEXT h
    nj = nj + 1:
  LOOP UNTIL n = n0

REM --- messa in forma e stampa dei valori numerici dei coefficienti
FOR h = 1 TO (n + 1): w = 0: c$ = "": PRINT "C"; h - 1; " = ";
  FOR s = nk TO 0 STEP -1:
    IF a(h, s) = 0 GOTO ness
    a = a(h, s): a$ = STR$(a): lc = LEN(a$) - 1
    c$ = RIGHT$(a$, lc): cz = g - lc: z$ = "":
    IF a(h, s) < 10 ^ (g - 1) AND w = 0 GOTO 101
    IF cz = 0 GOTO 101
    FOR k = 1 TO cz: z$ = z$ + "0": NEXT k
101    c$ = z$ + c$: PRINT c$;
    w = w + 1
  ness: NEXT s
  PRINT : 'DO: y$ = INKEY$: LOOP WHILE y$ = ""
NEXT h
t2 = TIMER - t1: PRINT t2; "sec."
END

```

Pertanto visualizzando in pratica solo la prima metà dei coefficienti, la seconda metà dei coefficienti è conosciuta in quanto essi hanno gli stessi valori, simmetricamente disposti rispetto al coefficiente mediano, di quelli della prima metà. Se poi si volesse visualizzare solo un insieme di coefficienti, il programma prevede anche questa possibilità, partendo da un coefficiente C_i fino ad un coefficiente C_f . Per ottenere tutti i coefficienti eventualmente con diverse schermate, che scorrono in modo automatico, si dovrà porre $C_i = 0$ e $C_f = n$.

Si riportano in coda a questo articolo alcuni esempi di risultati ottenibili con il **PROGRAMMA n°2** ed il **PROGRAMMA n° 4** così come compaiono sullo schermo del monitor.

RIFERIMENTI

- [1] http://www.matematicamente.it/approfondimenti/binomio_newton.pdf
- [2] <http://www-zeus.roma1.infn.it/~agostini/PRO/node42.html>
- [3] http://www.batmath.it/matematica/a_combin/binomio_proprieta.htm
- [4] <http://xoomer.virgilio.it/arioligrande/eloisa/calcomb.htm>
- [5] <http://www.isisluino.it/lavorimulti/calcomb.htm>
- [6] <http://dida.fausser.edu/calcolo/calcol3/calcoloc.htm>



ritratto di Isacco Newton

**ESEMPI DI RISULTATI OTTENIBILI CON IL PROGRAMMA n° 2.
attinenti al 1° Algoritmo**

1° ESEMPIO

**calcolo in aritmetica a precisione multipla
del coefficiente binomiale $C(n,k) = n!/(k!(n-k)!)$**

introdurre il numero n : 307

introdurre il numero k : 123

**$C(307, 123) = 2712800617978799353436571767625777641698623344914356963154419$
 $8240796891095920649872908000$**

**il valore trovato di $C(307, 123)$ è corretto
ed il numero di cifre che lo compongono è: 89
tempo impiegato: 0 secondi**

2° ESEMPIO

**calcolo in aritmetica a precisione multipla
del coefficiente binomiale $C(n,k) = n!/(k!(n-k)!)$**

introdurre il numero n : 2987

introdurre il numero k : 1079

**$C(2987, 1079) = 54403622651670805896952622041559099428784872032965879436$
 $66042305684831025815860963246460613370439754619291184258939369591875446133693$
 $05595451357651151787448726533863859156456985577237414585707349123338853746852$
 $20670989658972877460062953499434244310493475929405741977057328782651341204302$
 $08896160269785574822636342864278351463936027969512635610393295083616873752088$
 $45540178296055801100383148842822377759258486000305251791567096146487478247490$
 $56094822413784901482309909510274888957035847628294261930425271067974826368036$
 $62594061795231673172006120040652475509027666837090989064335478254702749717133$
 $99033030531603026326273851551909497696228138485815502408708181136444410046494$
 $46346338454996150789574333799296182672221523871328741342129637254405003446925$
 $22521242308668428507950748697982097674655414580293590074822309589583709993612$
 574805182075184157920**

**il valore trovato di $C(2987, 1079)$ è corretto
ed il numero di cifre che lo compongono è: 847
tempo impiegato: .87109375 secondi**

3° ESEMPIO

calcolo in aritmetica a precisione multipla
del coefficiente binomiale $C(n,k) = n!/(k!(n-k)!)$

introdurre il numero n : 10000

introdurre il numero k : 4761

C(10000 , 4761) = 173390147644956962278194585560017459926374593233988340620
58029787457366697518760353018738438408615271583698844904478507052069448122875
01036845895991866961099134019771907648616905684141247464922708045307927531987
74461093861332232679827494836910616751239787278655554753373707991765357417365
18043282948200485716605440714144513614891496064768257177877109262359083524253
07978936404545088007934905111621490641298438227493251653756831857602740328234
83132044696264563979081877795847004589123491370121041753157770055425389495109
94352415803820162558448641285157921403322513822826292334579876224655066139846
16430321508034000642700149925396724894547235223026967981028003934521247973794
57095200379553665269816670543437516686329496474019592184073043531678616788007
43700718575354726607185885181336789480475225537554255934366715089800216019034
48423976123825638258601803847229181124952412545693845279379993725504897493881
95315725981134667246034083186547926655847496844945105154021674708425043662377
64492107753067847300036617496194231954042127243322705481629213063532925530721
87193968934562283000225660167514065826926820521636446198896682538583650253785
97658483537092325530338130469501757085445355514007758088276111936359794845365
89159091295295942189674094199782154380271708962858676945599901100758267424463
70179155538386132368055988549119492706021942970932742425654266488269801226395
05896772815524824170633510418326219625049833337532242965472217064622651425544
79294233684436858481459796366794744095720411994975474024280241978913190691185
35370159756561940578826322017138346074859219273992140965785503009168686121127
70277936488927339686941290901496137165361829545494680011394996338411517114778
03219326139169243736429239328997134675904659230487901061367696759903174347562
10544283541568806652946871278471886008211086948755559067632012664824593032102
68764559102455251669279811739362955479713412937925702112158168059835353632577
19970849939360228284527254986202857221999067701434070200589332769629243280738
56068425058045209701202647103558650491779096290144230972931049973389315911475
30315122899270144255777151916273677838560693125247639053152038431459253950479
67159090234176606483869076212266899515386146713204722777059183474940147823839
65698282403552443472611485475397534970666875179168531226271945118152233519662
02470787095965599564155114268483852358906553891278967018239910534286189951243
61115267633357598595819050684441228952334151802477468768953783307401799835287
00114015493050406901111642110455313378497031150067856796908373061775540743925
17424519596041543336603050623792715058992880566001838119558704886071678881630
49464237054080970449566803659962929054235191887530124815231262762907221353890
1727531727779307867861194381472185265016122283719497188022876156585728596450
92425322208372205079706208401491740573070433633557830520314708942354531868478
40877207598059726238099629972224909086693327292771737688565943375001934377610
47287972497033324732882959289445042443348222065851222746793326572014784314074
144757437123198400000

il valore trovato di C(10000 , 4761) è corretto
ed il numero di cifre che lo compongono è: 3004
tempo impiegato: 24.37890625 secondi

ESEMPI DI RISULTATI OTTENIBILI CON IL PROGRAMMA n° 4
Attinenti al 2° Algoritmo

1° ESEMPIO

quale esponente $n > 1$ del binomio $(a+b)^n$ vuoi ? 40

da quale coefficiente vuoi visualizzare i risultati ? 0

sino a quale coefficiente vuoi visualizzarli ? 40

i coefficienti del binomio $(a+b)^{40}$ da C_0 a C_{40} sono:

$$C_0 = 1$$

$$C_1 = 40$$

$$C_2 = 780$$

$$C_3 = 9880$$

$$C_4 = 91390$$

$$C_5 = 658008$$

$$C_6 = 3838380$$

$$C_7 = 18643560$$

$$C_8 = 76904685$$

$$C_9 = 273438880$$

$$C_{10} = 847660528$$

$$C_{11} = 2311801440$$

$$C_{12} = 5586853480$$

$$C_{13} = 12033222880$$

$$C_{14} = 23206929840$$

$$C_{15} = 40225345056$$

$$C_{16} = 62852101650$$

$$C_{17} = 88732378800$$

$$C_{18} = 113380261800$$

$$C_{19} = 131282408400$$

$$C_{20} = 137846528820$$

$$C_{21} = 131282408400$$

$$C_{22} = 113380261800$$

$$C_{23} = 88732378800$$

$$C_{24} = 62852101650$$

$$C_{25} = 40225345056$$

$$C_{26} = 23206929840$$

$$C_{27} = 12033222880$$

$$C_{28} = 5586853480$$

$$C_{29} = 2311801440$$

$$C_{30} = 847660528$$

$$C_{31} = 273438880$$

$$C_{32} = 76904685$$

$$C_{33} = 18643560$$

$$C_{34} = 3838380$$

$$C_{35} = 658008$$

$$C_{36} = 91390$$

$$C_{37} = 9880$$

$$C_{38} = 780$$

$$C_{39} = 40$$

$$C_{40} = 1$$

tempo di calcolo: 0 secondi

2° ESEMPIO

quale esponente $n > 1$ del binomio $(a+b)^n$ vuoi ? 82

da quale coefficiente vuoi visualizzare i risultati ? 0

sino a quale coefficiente vuoi visualizzarli ? 41

i coefficienti del binomio $(a+b)^{82}$ da C_0 a C_{41} sono i seguenti:

$$C_0 = 1$$

$$C_1 = 82$$

$$C_2 = 3321$$

$$C_3 = 88560$$

$$C_4 = 1749060$$

$$C_5 = 27285336$$

$$C_6 = 350161812$$

$$C_7 = 3801756816$$

$$C_8 = 35641470150$$

$$C_9 = 293052087900$$

$$C_{10} = 2139280241670$$

$$C_{11} = 14002561581840$$

$$C_{12} = 82848489359220$$

$$C_{13} = 446107250395800$$

$$C_{14} = 2198671448379300$$

$$C_{15} = 9967310565986160$$

$$C_{16} = 41738112995067045$$

$$C_{17} = 162042085745554410$$

$$C_{18} = 585151976303390925$$

$$C_{19} = 1971038235969316800$$

$$C_{20} = 6208770443303347920$$

$$C_{21} = 18330655594514646240$$

$$C_{22} = 50825908693881519120$$

$$C_{23} = 132589327027517006400$$

$$C_{24} = 325948762275979307400$$

$$C_{25} = 756201128480271993168$$

$$C_{26} = 1657825550899057831176$$

$$C_{27} = 3438452994457305131328$$

$$C_{28} = 6754104096255420793680$$

$$C_{29} = 12576607627510093891680$$

$$C_{30} = 22218673475267832541968$$

$$C_{31} = 37270032926255719102656$$

$$C_{32} = 59399114976220052319858$$

$$C_{33} = 89998659054878867151300$$

$$C_{34} = 129703949814384249718050$$

$$C_{35} = 177879702602584113899040$$

$$C_{36} = 232231833953373704257080$$

$$C_{37} = 288720658428518659346640$$

$$C_{38} = 341906042875877359752600$$

$$C_{39} = 385740150936887277669600$$

$$C_{40} = 414670662257153823494820$$

$$C_{41} = 424784580848791721628840$$

tempo di calcolo: .05 secondi

3° ESEMPIO

quale esponente $n > 1$ del binomio $(a+b)^n$ vuoi ? 82
da quale coefficiente vuoi visualizzare i risultati ? 41
sino a quale coefficiente vuoi visualizzarli ? 82

i Coefficienti del binomio $(a+b)^{82}$ da C 41 a C 82 sono:

C 41 = 424784580848791721628840
C 42 = 414670662257153823494820
C 43 = 385740150936887277669600
C 44 = 341906042875877359752600
C 45 = 288720658428518659346640
C 46 = 232231833953373704257080
C 47 = 177879702602584113899040
C 48 = 129703949814384249718050
C 49 = 89998659054878867151300
C 50 = 59399114976220052319858
C 51 = 37270032926255719102656
C 52 = 22218673475267832541968
C 53 = 12576607627510093891680
C 54 = 6754104096255420793680
C 55 = 3438452994457305131328
C 56 = 1657825550899057831176
C 57 = 756201128480271993168
C 58 = 325948762275979307400
C 59 = 132589327027517006400
C 60 = 50825908693881519120
C 61 = 18330655594514646240
C 62 = 6208770443303347920
C 63 = 1971038235969316800
C 64 = 585151976303390925
C 65 = 162042085745554410
C 66 = 41738112995067045
C 67 = 9967310565986160
C 68 = 2198671448379300
C 69 = 446107250395800
C 70 = 82848489359220
C 71 = 14002561581840
C 72 = 2139280241670
C 73 = 293052087900
C 74 = 35641470150
C 75 = 3801756816
C 76 = 350161812
C 77 = 27285336
C 78 = 1749060
C 79 = 88560
C 80 = 3321
C 81 = 82
C 82 = 1

tempo di calcolo: .06 secondi

4° ESEMPIO

quale esponente $n > 1$ del binomio $(a+b)^n$ vuoi ? 230

da quale coefficiente vuoi visualizzare i risultati ? 80

sino a quale coefficiente vuoi visualizzarli ? 120

i coefficienti del binomio $(a+b)^{230}$ da C 80 a C 120 sono:

C 80 = 1897411454438346560853818501128659301153585200751045328292081054
C 81 = 3513724915626567705284849076164183891025157779168602459800150100
C 82 = 6384695273516568147407835516444675606862786696294167884271004450
C 83 = 11384757837113880552004333210045927588140872663271528275567574200
C 84 = 19923326214949290966007583117580373279246527160725174482243254850
C 85 = 34221242675089370365142436884314523514941093711363240875382531860
C 86 = 57698606835906496545879690095646580344958820792414766592214733950
C 87 = 95501142349086614972490521537621926088207703380548579187114042400
C 88 = 155189356317265749330297097498635629893337517993391441179060318900
C 89 = 247605489854513892189912222975351229717459860169231288173332194200
C 90 = 387915267438738431097529149328050259890687114265129018138220437580
C 91 = 596792719136520663226967922043154245985672483484813874058800673200
C 92 = 901675956086699697701614577869548262956613860917273135806231451900
C 93 = 1337970773548006003041105502645136132129168954909502072486666025400
C 94 = 1950021233788051302304589934706209043635065391729806212028438781700
C 95 = 2791609345212368180141307696000467683519672560792143629851238676960
C 96 = 3925700641704892753323713947500657679949539538613951979478304389475
C 97 = 5423132845241810607684305865619465248590085548188346033506111218450
C 98 = 7359966004256742967571557960483559980229401815398469616901150939325
C 99 = 9813288005675657290095410613978079973639202420531292822534867919100
C 100 = 12855407287435111050024987904311284765467355170895993597520676974021
C 101 = 16546563835312519173299489381786802173373823487291872947303841649730
C 102 = 20926536615248186013290530688730367454561012057457368727472505615835
C 103 = 26005793075259881647584348817062980914405917896646050457441560376960
C 104 = 31757074236134663165800118266990370924322611277635080847068059306480
C 105 = 38108489083361595798960141920388445109187133533162097016481671167776
C 106 = 44939255994530183725188846604231656968381053694766623840190649962000
C 107 = 52079137788053670859097354943221733309151875309823003328819070984000
C 108 = 59312351369727791811749765352002529602089635769520642680043941954000
C 109 = 66386301533089822027830012595819345059219592329188242265737256132000
C 110 = 73024931686398804230613013855401279565141551562107066492310981745200
C 111 = 78945872093404112681743798762595977908261136823899531343038899184000
C 112 = 83879989099241869724352786185258226527527457875393252051978830383000
C 113 = 87591493041686200243129458140358148055294159551295608337464619338000
C 114 = 89896532332256889723211812301946520372538742697382334872661056689000
C 115 = 90678241309059123546891915017615620549691253503446529088945065877600
C 116 = 89896532332256889723211812301946520372538742697382334872661056689000
C 117 = 87591493041686200243129458140358148055294159551295608337464619338000
C 118 = 83879989099241869724352786185258226527527457875393252051978830383000
C 119 = 78945872093404112681743798762595977908261136823899531343038899184000
C 120 = 73024931686398804230613013855401279565141551562107066492310981745200

tempo di calcolo: .76 secondi

5° ESEMPIO

quale esponente $n > 1$ del binomio $(a+b)^n$ vuoi ? 350

da quale coefficiente vuoi visualizzare i risultati ? 287

sino a quale coefficiente vuoi visualizzarli ? 325

i coefficienti del binomio $(a+b)^n$ da C 287 a C 325 sono:

C 287 = 945502238259502446169651921833083955570238570956223845091147708401600
C 288 = 456828614619266160099611357900987115280989687396673966113688561212850
C 289 = 170669114554998276561162298234813844800765953697556352591863981990300
C 290 = 246244193061568603000796207559736705285678355777761853476219665177270
C 291 = 50771998569395588247586846919533341296016155830466361541488590758200
C 292 = 10258725738336779817149397151549544987893675321909299078588448132650
C 293 = 2030737518169055390425477934436428700675198527886482411461194510900
C 294 = 393714416787878085898817150554001482783967061529011896099619343950
C 295 = 74739007932614145119775459088217230630176798120761580276537909360
C 296 = 13887315663154655343201521114364688123850418569736104443275625050
C 297 = 2524966484209937335127549293520852386154621558133837171504659100
C 298 = 449071220346062680408590981733574417671795109332528087549486350
C 299 = 78099342668880466158015822910186855247268714666526623921649800
C 300 = 13276888253709679246862689894731765392035681493309526066680466
C 301 = 2205463165068053031040313936001954384059083304536466124033300
C 302 = 357840049961372842784686698225482664963228748087042516813350
C 303 = 56687532667148173114405813580274481578333267023689903653600
C 304 = 8764190905776197817029846178529278401913366941162583788550
C 305 = 1321812398903951146174993194138841988485294686208127391060
C 306 = 194384176309404580319851940314535586541955100912959910450
C 307 = 27859621360305542456265424670487185041843727818144091400
C 308 = 3889492592510189368894198898801782327270390572013623150
C 309 = 528668896069346127810861986244902452250344349594084700
C 310 = 69920724964010294323372069148519356587948768817282170
C 311 = 8993019287975600556060716289198631072404986343058800
C 312 = 1124127410996950069507589536149828884050623292882350
C 313 = 136475532325508315147886269564515966753749792746100
C 314 = 16081511770840151784942012655691371878626567935050
C 315 = 1837887059524588775421944303507585357557322049720
C 316 = 203563440137217111201797628553055340235779340950
C 317 = 21833302727651046627322143125564295167244471900
C 318 = 2265720094378882197174939380954785347544237650
C 319 = 227282266520765612255793292133395395364939200
C 320 = 22017969569199168687279975175422678925978485
C 321 = 2057754165345716699745792072469409245418550
C 322 = 185325685698837839418099286029853627692975
C 323 = 16065384518784704345841424175962543577100
C 324 = 1338782043232058695486785347996878631425
C 325 = 107102563458564695638942827839750290514

tempo di calcolo: 2.54 secondi

6° ESEMPIO

quale esponente $n > 1$ del binomio $(a+b)^n$ vuoi ? 400
da quale coefficiente vuoi visualizzare i risultati ? 190
sino a quale coefficiente vuoi visualizzarli ? 210

i Coefficienti del binomio $(a+b)^{400}$ da C 190 a C 210 sono:

C 190 = 6250888163122239402824565066914879906682621696635906281054085249931204
2618667142122712083786896541505737966069077577600
C 191 = 6872704263118692537136956356293847017818589299966179680740093730290852
8533613088197746270132189914744528653793226656000
C 192 = 7481224953082326772195957700340698055854610227567351839972289529327022
1164193413715255054466810896779200461681168599500
C 193 = 8062667306948828852936576174460441428071289778932690065876871617098552
3327213627216440680461640759223179772174523672000
C 194 = 8602949136795915322463253959346965853663695795046736307404703220306187
2828521756875274334307008438964939241443950516000
C 195 = 9088243703486966956038104182694743414639596583485270150386506991708074
7706028112391315450601249940650140942243352852800
C 196 = 9505561016402184826468425293124604081638353569461634596067520067857935
3468039607348059527414572642006524965101465994000
C 197 = 9843322067746424896444460709631569708904691005939966789836416720015323
9124264364969564180672958471925538542541619608000
C 198 = 10091890806830930575647603656844488135897233708110167971397942394763185
6273867000448593579174800857580223859272468588000
C 199 = 10244029864220341589350833862726565846488649291649517237298413888151575
3604628814525708055242762679553795073231350024000
C 200 = 10295250013541443297297588032040198675721092538107764823484905957592333
2372651958598336595518976492951564048597506774120
C 201 = 10244029864220341589350833862726565846488649291649517237298413888151575
3604628814525708055242762679553795073231350024000
C 202 = 10091890806830930575647603656844488135897233708110167971397942394763185
6273867000448593579174800857580223859272468588000
C 203 = 9843322067746424896444460709631569708904691005939966789836416720015323
9124264364969564180672958471925538542541619608000
C 204 = 9505561016402184826468425293124604081638353569461634596067520067857935
3468039607348059527414572642006524965101465994000
C 205 = 9088243703486966956038104182694743414639596583485270150386506991708074
7706028112391315450601249940650140942243352852800
C 206 = 8602949136795915322463253959346965853663695795046736307404703220306187
2828521756875274334307008438964939241443950516000
C 207 = 8062667306948828852936576174460441428071289778932690065876871617098552
3327213627216440680461640759223179772174523672000
C 208 = 7481224953082326772195957700340698055854610227567351839972289529327022
1164193413715255054466810896779200461681168599500
C 209 = 6872704263118692537136956356293847017818589299966179680740093730290852
8533613088197746270132189914744528653793226656000
C 210 = 6250888163122239402824565066914879906682621696635906281054085249931204
2618667142122712083786896541505737966069077577600

tempo di calcolo: 3.89 secondi