UNA NOTA SUI COEFFICIENTI DELLE POTENZE DELLO SVILUPPO IN SERIE DELLA FUNZIONE **F(t) =** $\frac{-t}{\ln(1-t)}$**, E RELAZIONI CONNESSE**

(A NOTE ON THE COEFFICIENTS OF THE POWERS IN THE EXPANSION IN SERIES OF THE FUNCTION F(t) = $\frac{-t}{\ln(1-t)}$*, AND RELATED CONNEXIONS)*

di **Pasquale Cutolo**
(p.cutolo@inwind.it)

1.00 Premesse:

Le potenze dello sviluppo in serie della Funzione

$$F(t) = \frac{-t}{\ln(1-t)} \tag{1.01}$$

presentano dei coefficienti che hanno particolari caratteristiche che andremo ad esaminare.

Nel presente studio vengono prese in esame delle relazioni utili per il calcolo dei coefficienti $\frac{C_K}{k!}$ delle potenze suddette.

Infine, vengono prese in esame le relazioni che collegano i numeri C_K con i numeri di Bernoulli, e con i numeri di Stirling di seconda specie.

ABSTRACT:

The powers in the expansion in series of the Function F(t) = $\frac{-t}{\ln(1-t)}$ have coefficients with particular characteristics that we are going to examine.

In our study we examine some relations useful to calculate the coefficients $\frac{C_K}{k!}$ of the above-mentioned powers

Furthermore, we consider the relations that link up the numbers C_K with the Bernoulli's numbers, and with the Stirling's numbers of second kind

2.00 Svolgimento dello studio

Posto

$$F(t) = \frac{-t}{\ln(1-t)} = \sum_{K\ge 0} C_K \frac{t^K}{k!}, \qquad |t| \le 1, \tag{2.01}$$

abbiamo:

$$-t = \sum_{K\ge 0} C_K \frac{t^K}{k!} \sum_{h\ge 1} (-1)\frac{t^h}{h} = (h=r+1) = \sum_{K\ge 0} C_K \frac{t^K}{k!} \sum_{r\ge 0} (-1)\frac{t^{r+1}}{r+1}, \tag{2.02}$$

e quindi

$$1 \;= \sum_{K\geq 0} C_K \frac{t^K}{k!} \sum_{r\geq 0} \frac{t^r}{r+1} \qquad (2.03)$$

Derivando la (2.03), n volte, rispetto a t, e ponendo dopo t=0, ricaviamo:

$$\sum_{K=0}^{n} \binom{n}{k} C_K \frac{(n-k)!}{n-k+1} = 0$$

cioè

$$\sum_{K=0}^{n} \frac{C_K}{k!} \frac{1}{n-k+1} = 0, \text{ n (intero)>0,} \qquad (2.04)$$

Dalla (2.03), per k=0, ed r=0, abbiamo $C_0 = 1$; ritroviamo lo stesso valore $(C_0 = 1)$ se passiamo al limite, per $t \to 0$, di ambo i membri della (2.01)

La (2.04) rappresenta una relazione attraverso la quale possiamo calcolare tutte le costanti C_K

Dalla (2.04), per n=1, 2, 3, 4, 5… , troviamo, rispettivamente:

$$C_1 = -\frac{1}{2}, C_2 = -\frac{1}{6}, C_3 = -\frac{1}{4}, C_4 = -\frac{19}{30}, C_5 = -\frac{9}{4}, \ldots$$

Dalla (2.04) desumiamo, inoltre, che le costanti C_K sono dei numeri razionali

Le costanti C_K sono dei numeri che godono delle seguenti proprietà:

A) Integrando ambo i membri della (2.01), rispetto a t, tra i limiti 0 e 1, ricaviamo:

$$\sum_{K\geq 0} C_K \frac{1}{(k+1)!} = \ln 2 \qquad (2.05)$$

Infatti

$$\int_0^1 \frac{-t}{\ln(1-t)} dt = \int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} dt = (t = e^{-y}) = \int_0^\infty \frac{e^{-y}-1}{(-y)} e^{-y} dy = \int_0^\infty \frac{e^{-y}-e^{-2y}}{y} dy = \ln 2$$

Ricordiamo che

$$\int_0^\infty \frac{e^{-py}-e^{-qy}}{y} dy = \ln\frac{q}{p}, \qquad (2.06)$$

essendo p e q numeri reali positivi.

Ponendo nella (2.06), q=2, p=1,otteniamo il valore fornito dalla (2.05)

B) Dividendo, per t, gli ultimi due membri della (2.01), ed integrando, rispetto a t, tra i limiti 0 e 1, otteniamo:

$$\sum_{K\geq 1} \frac{C_K}{k!k} = -\gamma \qquad (2.07)$$

essendo $\gamma =$ 0,5772156649 la ben nota costante di Eulero-Mascheroni.

Infatti, operando, abbiamo:

$$\int_0^1 \frac{-1}{\ln(1-t)} dt - \int_0^1 \frac{dt}{t} = -\int_0^1 \frac{1}{\ln t} dt - (\ln t)_0^1 = (t = e^{-y}) =$$

$$= -\int_0^\infty \frac{1}{(-y)} e^{-y} dy - (\ln y)_0^1 = \int_0^\infty e^{-y} d\ln y - (\ln y)_0^1 =$$

$$= \left[(e^{-y}\ln y)_0^\infty + \int_0^\infty (\ln y) e^{-y} dy \right] - (\ln y)_0^1$$

Ora, $\left[\int_0^\infty (\ln y) e^{-y} dy \right] = \Gamma'(1) = \Psi(1) = -\gamma$, mentre $\lim_{y\to\infty} (e^{-y}\ln y) = 0$;

quindi:

$$-\lim_{y\to 0}(e^{-y}\ln y)-\gamma+\lim_{y\to 0}(\ln y)=-\gamma+\lim_{y\to 0}\left[(1-e^{-y})\ln y\right]=-\gamma\,,$$

in quanto $\lim_{y\to 0}\left[(1-e^{-y})\ln y\right]=0$

C) Le costanti $C_1, C_2, ... C_n$ sono tutte negative, e lo dimostreremo.

Ammettiamo, per ipotesi, che le costanti $C_1, C_2, ... C_n$ siano tutte negative.

Per la (2.04), abbiamo:

$$\sum_{K=0}^{n}\frac{C_K}{k!}\frac{1}{n-k+1}=\frac{C_0}{0!}\frac{1}{n+1}+\frac{C_1}{1!}\frac{1}{n}+...+\frac{C_K}{k!}\frac{1}{n-k+1}+...+\frac{C_n}{n!}=0 \qquad (2.08)$$

Sostituendo, nella (2.08), n+1 ad n, otteniamo:

$$\sum_{K=0}^{n+1}\frac{C_K}{k!}\frac{1}{n-k+2}=\frac{C_0}{0!}\frac{1}{n+2}+\frac{C_1}{1!}\frac{1}{n+1}+...+\frac{C_K}{k!}\frac{1}{n-k+2}+...+\frac{C_{n+1}}{(n+1)!}=0 \qquad (2.09)$$

Moltiplicando ciascun termine della (2.08) per n+1, e ciascun termine della (2.09) per n+2, e sottraendo, quindi, termine a termine, i risultati ottenuti, abbiamo

$$\frac{C_1}{1!}\left(\frac{n+1}{n}-\frac{n+2}{n+1}\right)+\frac{C_2}{2!}\left(\frac{n+1}{n-1}-\frac{n+2}{n}\right)+...+\frac{C_K}{k!}\left(\frac{n+1}{n-k+1}-\frac{n+2}{n-k+2}\right)+...$$

$$. \qquad (2.10)$$

$$...+\frac{C_n}{n!}\left(n+1-\frac{n+2}{2}\right)-\frac{C_{n+1}(n+2)}{n+1!}=0$$

Ora, nella (2.10), i coefficienti delle costanti $C_1, C_2, ... C_n$ sono tutti maggiori di zero; infatti esaminando il coefficiente di C_K /k!, otteniamo:

$$\frac{n+1}{n-k+1}-\frac{n+2}{n-k+2}=1+\frac{k}{n-k+1}-\left(1+\frac{k}{n-k+2}\right)=k\left(\frac{1}{n-k+1}-\frac{1}{n-k+2}\right)=$$

$$=\frac{k}{(n-k+1)(n-k+2)} \qquad (2.11)$$

il quale, per ogni valore di k intero positivo, compreso tra 1 ed n, risulta sempre positivo.

Avendo ammesso, per ipotesi, che tutte le costanti $C_1, C_2, ... C_n$ presentano valori negativi, dalla (2.10) deduciamo che, necessariamente, anche la costante C_{n+1} deve presentare un valore negativo.

Sappiamo, per averli calcolati, che i valori delle costanti C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 sono tutti negativi, e quindi anche i valori delle successive costanti $C_6, C_7, ...$ devono risultare negativi, come abbiamo dimostrato.

Ora, indicando con C_K^* il valore assoluto di C_K, dalle (2.05) e (2.07), rispettivamente, ricaviamo:

$$\sum_{K\geq 1}C_K^*\frac{1}{(k+1)!}=1-\ln 2 \qquad (2.12)$$

$$\sum_{K\geq 1}\frac{C_K^*}{k!k}=\gamma \qquad (2.13)$$

Dalla (2.01), passando al limite per $t\to 1^-$, otteniamo:

$$\sum_{K\geq 1}C_K^*\frac{1}{k!}=1\text{, oppure }\sum_{K\geq 0}C_K^*\frac{1}{k!}=2 \qquad (2.14)$$

Osservando la (2.14), possiamo ammettere che:

$$\sum_{K\geq 0}(C_K^* \frac{1}{k!} - \frac{1}{2^K}) = 0 \qquad (2.15)$$

La (2.15) può essere interpretata affermando che la somma algebrica degli scostamenti dei coefficienti $C_K^* \frac{1}{k!}$ dai valori $1/2^K$, per tutti i valori di k interi non negativi, nell'intervallo $(0,\infty)$, è uguale a zero.

Dal programma "Matematica", (versione 5.0), abbiamo ricavato direttamente i primi diciotto valori di $C_K^* \frac{1}{k!}$, e cioè :

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{12}, \frac{1}{24}, \frac{19}{720}, \frac{3}{160}, \frac{863}{60480}, \frac{275}{24182}, \frac{33953}{3628800}, \frac{8183}{1036800}, \frac{3250433}{479001600}, \frac{4671}{788480}, \frac{13695779093}{2615348736000},$$
$$\frac{2224234463}{475517952000}, \frac{132282840127}{31384184832000}, \frac{2639651053}{689762304000}, \frac{111956703448001}{32011868528640000}, \frac{50188465}{15613165568}$$

Sostituendo, nella (2.01), (t) con (-t), otteniamo:

$$\frac{t}{\ln(1+t)} = \sum_{K\geq 0} C_K \frac{t^K(-1)^K}{k!} \qquad (2.16)$$

Ponendo, nella (2.16), t=1, ricaviamo:

$$\sum_{K\geq 0} C_K \frac{(-1)^K}{k!} = \frac{1}{\ln 2}$$

Integrando, rispetto a t, ambo i membri della (2.16), tra i limiti 0 ed 1, ricaviamo:

$$\sum_{K\geq 0} C_K \frac{(-1)^K}{(1+k)!} = \int_0^1 \frac{tdt}{\ln(1+t)} = (1+t=e^z) = \int_0^{\ln 2} \frac{(e^z-1)e^z}{z}dz =$$
$$= \sum_{K\geq 0} \frac{1}{k!}\int_0^{\ln 2} \frac{(2z)^K - z^K}{z}dz = \sum_{K\geq 1} \frac{1}{k!k}\left[(2\ln 2)^K - (\ln 2)^K\right] \qquad (2.17)$$

Dividendo, per t, 1° e 2° membro della (2.16), ed integrando, rispetto a t, tra i limiti 0 ed 1, otteniamo:

$$\sum_{K\geq 1} \frac{C_K(-1)^K}{k!k} = \int_0^1 \frac{dt}{\ln(1+t)} - \int_0^1 \frac{dt}{t} = (1+t=e^z) = \int_0^{\ln 2} \frac{e^z}{z}dz - \int_0^1 \frac{dz}{z} =$$
$$= \sum_{K\geq 1} \frac{(\ln 2)^K}{k!k} + \int_0^1 \frac{dz}{z} - \int_{\ln 2}^1 \frac{dz}{z} - \int_0^1 \frac{dz}{z} = \sum_{K\geq 1} \frac{(\ln 2)^K}{k!k} + \ln\ln 2 \qquad (2.18)$$

Sommando, membro a membro, la relazioni (2.17) e (2.18), ricaviamo la relazione:

$$\sum_{K\geq 1} \frac{1}{k!k}\left[(2\ln 2)^K - C_K(-1)^K\left(2 - \frac{1}{k+1}\right)\right] = 1 - \ln\ln 2$$

3.00 Relazioni connesse con C_K

3.01 Relazione tra C_K e S(n,k)

Sostituendo, nella (1.01), $1-t=e^z$, ricaviamo:

$$\frac{e^z-1}{z} = \sum_{K\geq 0} \frac{C_K}{k!}(1-e^z)^K \qquad (3.01)$$

Ricordando che

$$\frac{e^z-1}{z}=\sum_{K\geq 1}\frac{z^{K-1}}{k!} = \sum_{K\geq 0}\frac{z^K}{(k+1)!},$$

troviamo:

$$\sum_{K\geq 0}\frac{C_K(-1)^K}{k!}(e^z-1)^K = \sum_{K\geq 0}\frac{z^K}{(k+1)!} \tag{3.02}$$

Derivando, n volte, ambo i membri della (3.02), rispetto a z, e ponendo dopo z=0, ricaviamo:

$$\sum_{K\geq 0}\frac{C_K(-1)^K}{k!}((e^z-1)^K)^{(n)}_{z=0} = \frac{n!}{(n+1)!}=\frac{1}{n+1} \tag{3.03}$$

Dalla formula

$$\binom{m}{p}(e^t-1)^p=(m)_p\sum_{n\geq 0}S(n,p)\frac{t^n}{n!} \tag{3.04}$$

riportata da Riordan (vedasi testo [1], pag. 91), ponendo p=k, ricaviamo:

$$\frac{(e^t-1)^K}{k!}=\sum_{n\geq K}S(n,k)\frac{t^n}{n!} \tag{3.05}$$

Nella (3.04), $(m)_P$ = m(m-1)(m-2)…(m -p+1), essendo p un numero intero non negativo, mentre i numeri S(n.p) rappresentano i numeri di Stirling di seconda specie.

La formula (3.05) la ritroviamo anche nel testo [2], a pag. 233, e nel testo [3], a pag 63.

Derivando, n volte, rispetto a t, i due membri della (3.05), ponendo dopo t=0, troviamo:

$$\left[\frac{(e^t-1)^K}{k!}\right]^{(n)}_{t=0} = \mathrm{S(n,k)}, \qquad (n\geq k) \tag{3.06}$$

La (3.06) è una formula molto importante per mezzo della quale vengono definiti i numeri di Stirling di seconda specie.

E' opportuno precisare che i numeri di St irling di seconda specie sono definiti anche dalla relazione

$$x^n=\sum_{K=0}^{n}S(n,k)(x)_K$$

(Vedasi Riordan, testo [2], pag. 202, formula (8)).

(Vedasi anche Roman , testo [4], pp. 60 e 101)

La funzione $(x)_K=x(x-1)(x-2)...(x-k+1)$ è la “lower factorial polynomials”, chiamata anche “falling factorial” o “binomial polynomials” (vedasi Roman S., testo [4], pagg. 28 e 29).

Sostituendo la (3.06) nella (3.03), otteniamo la relazione:

$$\sum_{K\geq 0}C_K(-1)^K S(n,k)=\frac{1}{n+1} \tag{3.07}$$

Poiché per ogni k>n, risulta S(n,k) = 0, troviamo la relazione:

$$\sum_{K=0}^{n}C_K(-1)^K S(n,k)=\frac{1}{n+1} \tag{3.08}$$

La formula (3.08) rappresenta una interessante relazione, che collega i numeri C_K ai numeri di Stirling di seconda specie S(n,k).

La relazione (3.08) consente di calcolare i numeri C_K quando sono noti i numeri S(n,k), e, viceversa, consente di calcolare i numeri S(n,k) quando sono noti i numeri C_K.

Desideriamo fornire un'altra applicazione della (3.06).

E' noto che:

$$e^{cz} = (e^z - 1 + 1)^c = \sum_{K=0}^{\infty} \binom{c}{k} (e^z - 1)^K , \qquad \left| e^z - 1 \right| \le 1$$

Derivando, n volte, rispetto a z, i membri estremi della precedente, ponendo dopo z=0,otteniamo:

$$c^n = \sum_{K=0}^{n} \binom{c}{k} k! S(n,k) , \qquad \text{(n, intero positivo)}$$

essendo (c) un numero qualunque, reale o complesso.

In particolare, per c=m (intero positivo), ricaviamo:

$$m^n = \sum_{K=0}^{n} \binom{m}{k} k! S(n,k) , \quad m \ge n$$

Per $m \le n$, dalla precedente otteniamo

$$m^n = \sum_{K=0}^{m} \binom{m}{k} k! S(n,k)$$

Riportiamo alcune relazioni e correlazioni, riguardanti i numeri di Stirling di seconda specie, che si trovano in Riordan, nel testo $[2]$, pp. 226-227

$$\text{S(n,k)} = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{K} (-1)^j \binom{k}{j} (k-j)^n \qquad (3.09)$$

$$\text{S(n,k) = S(n-1,k-1) + kS(n-1,k)} \qquad (3.10)$$

$$\text{S(k+1,k) = S(k,k-1) + k}$$

$$\text{S(k+2,k) = S(k+1,k-1) + kS(k,k-1)} + k^2 \qquad (3.11)$$

$$\text{S(k+1,k)} = \binom{k+1}{2} \qquad (3.12)$$

$$\text{S(k+2,k)} = \binom{k+2}{3} + 3\binom{k+2}{4} \qquad (3.13)$$

Oltre le relazioni precedenti, sussiste la seguente relazione:

$$\sum_{j=K}^{m} \binom{m}{j} c^{m-j} S(j,k) = \sum_{j=0}^{m-K} \binom{c}{j} \frac{(k+j)!}{k!} S(m, j+k) , \quad m \ge k$$

(essendo, m e k, numeri interi positivi, e (c) un numero qualunque, reale o complesso).

La formula precedente , per c=1, si riduce a:

$$\sum_{j=K}^{m-1} \binom{m}{j} S(j,k) = (k+1) S(m,k+1) , \qquad m \ge k+1$$

Inseriamo anche la seguente formula di duplicazione per i numeri di Stirling di seconda specie:

$$S(n,2m) = \binom{2m}{m}^{-1} \sum_{j=m}^{n} \binom{n}{j} S(j,m)S(n-j,m)\,, \qquad \text{(A.1)}$$

n>2m, (n ed m interi positivi)

La formula (A.1) è stata ricavata partendo dalla seguente identità:

$$\frac{(e^z-1)^{p+q}}{(p+q)!} = \frac{p!q!}{(p+q)!}\frac{(e^z-1)^p}{p!}\frac{(e^z-1)^q}{q!}\ , \qquad \text{(A.2)}$$

(p, q interi positivi).

Derivando, ambo i membri della (A.2), n volte, rispetto a z, e ponendo dopo z=0, otteniamo:

$$S(n,p+q) = \binom{p+q}{p}^{-1} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} S(j,p)S(n-j,q)\,, \qquad \text{(A.3)}$$

(Vedasi Riordan, testo [2], pag. 204)

Ponendo, nella (A.3), p=q=m, troviamo la (A.1)

Riportiamo, nella tabella seguente, i valori di S(n,k) per vari valori di n e di k:

k \ n	0	1	2	3	4	5
0	1	0	0	0	0	0
1		1	1	1	1	1
2			1	3	7	15
3				1	6	25
4					1	10
5						1

Risulta quindi facile verificare la (3.08).

Es. per n=5, il valore del 1° membro della (3.08) è dato da:

$C_0S(5,0) - C_1S(5,1) + C_2S(5,2) - C_3S(5,3) + C_4S(5,4) - C_5S(5,5)$

Sostituendo, nella precedente, i valori di C_K e di S(5,k), troviamo:

0 – (-1/2)(1) + (-1/6)(15) – (-1/4)(25) + (-19/30)(10) – (-9/4)(1) = 1/6,
valore perfettamente identico a quello che ricaviamo sostituendo n=5, nel 2° membro della (3.08), cioè 1/6

3.02 Relazione tra C_K, S(n,k) e B_n

Dalla (3.01) ricaviamo:

$$\sum_{K\geq 0} \frac{C_K(-1)^K}{k!}(e^z-1)^K \frac{z}{e^z-1} = 1 \qquad \text{(3.14)}$$

cioè

$$C_0\frac{z}{e^z-1} + \sum_{K\geq 1} \frac{C_K(-1)^K z}{k!}(e^z-1)^{K-1} = 1 \qquad \text{(3.15)}$$

Ricordiamo che

$$\frac{z}{e^z-1} = \sum_{K\geq 0} B_K \frac{z^K}{k!}\,, \qquad |z| < 2\pi \qquad \text{(3.16)}$$

dove le costanti B_K rappresentano i ben noti numeri di Bernoulli, i cui primi valori sono dati da:

$$B_0 = 1, B_1 = -\frac{1}{2}, B_2 = \frac{1}{6}, B_4 = -\frac{1}{30}, B_6 = \frac{1}{42}, B_8 = -\frac{1}{30}, B_{10} = \frac{5}{66}$$

$B_{2n+1} = 0,$ per n = 1,2,3,…

Sostituendo, nella (3.15), (k+1) a (k), ricordando che $C_0 = 1$, e tenendo presente la (3.16), ricaviamo:

$$\sum_{K\geq 0} B_K \frac{z^K}{k!} - \sum_{K\geq 0} \frac{C_{K+1}(-1)^K zk!}{(k+1)!} \frac{(e^z-1)^K}{k!} = 1 \qquad (3.17)$$

Derivando la (3.17), n+1 volte, rispetto a z, e ponendo dopo z=0, otteniamo:

$$B_{n+1} = \sum_{K\geq 0} \frac{C_{K+1}(-1)^K}{k+1} \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} \frac{\left[(e^z-1)^K\right]^{(j)}_{z=0}}{k!} (z)^{(n+1-j)}_{z=0}, \quad (\text{ n= } 0,1,2,3,\ldots), \qquad (3.18)$$

Il valore di $(z)^{(n+1-j)}$, nel punto z=0, è diverso da zero solamente per j = n,

Pertanto, applicando la (3.06) alla (3.18), troviamo:

$$\frac{B_{n+1}}{n+1} = \sum_{K=0}^{n} \frac{C_{K+1}(-1)^K}{k+1} S(n,k) \ , \quad (\text{n = } 0,1,2,3,\ldots), \qquad (3.19)$$

La formula (3.19) rappresenta un’altra interessante relazione che collega i numeri C_K ai numeri di Bernoulli B_n ed ai numeri di Stirling di seconda specie S(n,k).

La relazione (3.19) consente di calcolare i numeri di Bernoulli quando sono noti i numeri C_K ed i numeri S(n,k); ovvero essa consente di calcolare la sequenza di una delle costanti quando sono note le sequenze delle altre due costanti.

Sostituendo nella (3.19), (2n) ad (n), e ricordando che $B_{2n+1} = 0$, (n=1,2,…), otteniamo:

$$\sum_{K=0}^{2n} \frac{C_{K+1}(-1)^K}{k+1} S(2n,k) = 0$$

La precedente rappresenta un’altra relazione, diversa dalla (3.08), che collega C_K a S(2n,k)

La (3.19) è facilmente verificabile.

Es., per n=3, il valore del 2° membro della (3.19) è dato da:

$$\frac{C_1}{1} S(3,0) - \frac{C_2}{2} S(3,1) + \frac{C_3}{3} S(3,2) - \frac{C_4}{4} S(3,3)$$

Sostituendo, nella precedente, i valori di C_K e di S(n,k), otteniamo:

$$(-\frac{1}{2})(0) - (\frac{1}{2})(-\frac{1}{6})(1) + (\frac{1}{3})(-\frac{1}{4})(3) - (\frac{1}{4})(-\frac{19}{30})(1) = -\frac{1}{120}$$

valore perfettamente identico a quello del 1° membro della (3.19), che è dato da:

$$\frac{B_4}{4} = (\frac{1}{4})(-\frac{1}{30}) = -\frac{1}{120}$$

Tra i numeri di Bernoulli B_n ed i numeri di Stirling di seconda specie, S(n,k), sussiste la seguente relazione:

$$B_n = \sum_{K=0}^{n} \frac{(-1)^K k!}{k+1} S(n,k), \qquad (3.20)$$

La relazione (3.20) è stata ricavata partendo dal seguente sviluppo in serie:

$$\frac{\ln(1-t)}{-t} = \frac{1}{-t} \sum_{K\geq 1} \frac{(-1)^{K-1}(-t)^K}{k} = \sum_{K\geq 1} \frac{t^{K-1}}{k} \qquad (3.21)$$

Sostituendo, nella (3.21), (k-1) con (k), ricaviamo:

$$\frac{\ln(1-t)}{-t} = \sum_{K\geq 0} \frac{t^K}{k+1} \tag{3.22}$$

Ponendo, nella (3.22), 1-t = e^z, troviamo:

$$\frac{z}{e^z-1} = \sum_{K\geq 0} \frac{(-1)^K (e^z-1)^K}{k+1} = \sum_{K\geq 0} \frac{(-1)^K (k!)}{k+1} \left[\frac{(e^z-1)^K}{k!} \right] \tag{3.23}$$

Derivando i membri estremi della (3.23), n volte, rispetto a z, e ponendo dopo z=0, tenendo presente la (3.16) e la (3.06), troviamo la relazione (3.20).

La relazione (3.20) la troviamo nel testo [1], a pag. 45

E' facile verificare la relazione (3.20).

Es., per n=4, il valore del 2° membro della (3.20) è data da:

$$\frac{0!}{1} S(4,0) - \frac{1!}{2} S(4,1) + \frac{2!}{3} S(4,2) - \frac{3!}{4} S(4,3) + \frac{4!}{5} S(4,4) = -\frac{1}{30},$$

valore perfettamente identico a quello fornito dal 1° membro della (3.20), e cioè $B_4 = -\frac{1}{30}$

Pertanto, la relazione (3.20) consente di calcolare i numeri di Bernoulli quando sono noti i numeri di Stirling di seconda specie, e, viceversa, consente di calcolare i numeri di Stirling di seconda specie quando sono noti i numeri di Bernoulli.

Sostituendo, nella (3.20), (2n+1) ad (n), troviamo la relazione:

$$\sum_{K=0}^{2n+1} \frac{(-1)^K k!}{k+1} S(2n+1,k) = 0, \quad (\text{n} = 1,2,3,\ldots) \tag{3.24}$$

Siamo grati a tutti coloro che inoltreranno osservazioni o suggerimenti, indirizzando a p.cutolo@inwind.it.

Riferimenti

[1] JOHN RIORDAN
An Introduction to Combinatorial Analysis
By Bell Telephone Laboratories, Inc.
Princeton University Press, 1978

[2] JOHN RIORDAN
Combinatorial Identities
JohnWiley and Sons, Inc. N.Y. 1968

[3] LOUIS COMTET
ANALYSE COMBINATOIRE
Presses Universitaires De France
Tome Premier, 1970

[4] ROMAN, S.
The Umbral Calculus
Academic Press, N.Y. 1984

[5] http://mathworld.wolfram.com/StirlingNumberoftheSecondKind

Il dott.ing.Pasquale Cutolo, Commendatore della Repubblica Italiana, ha conseguito la Laurea in Ingegneria Elettrotecnica presso l'Università di Napoli; ha conseguito inoltre il Diploma di Specializzazione in Telecomunicazioni, per Ingegneri, presso l'Istituto Superiore delle Poste e delle Telecomunicazioni (ora ISCTI). Dopo aver superato il concorso d'ingresso nel Ruolo Tecnico degli Ingegneri delle Telecomunicazioni dell'ex Ministero delle Poste e delle Telecomunicazioni, ha percorso l'intera carriera dirigenziale presso il predetto Ministero, svolgendo la propria attività nell'ambito dei Servizi di Telecomunicazione. Ha insegnato matematica nei corsi di qualificazione per dipendenti.

p.cutolo@inwind.it