PROCEDURE PER LA FORMAZIONE DELLE COPPIE E DELLE TERNE DI GOLDBACH

(p + q = N pari ed r + p + q = N' dispari)

In questo lavoro esporremo le procedure aritmetiche per la formazione di Glodbach e delle terne di Goldbach, relativi alla congettura debole e alla congettura debole di Goldbach, da noi dimostrate in precedenti lavori; e con queste procedure tali dimostrazioni sono rafforzate, poiché abbiamo compreso perfettamente come si formano le suddette coppie (determinante, come vedremo, è il numero dei multipli dispari di 3 e dei numeri primi fino ad N/2 e da N/2 ad N)

LA CONGETTURA FORTE DI GOLDBACH E RELAZIONE DI GOLDBACH

per N = 120 = 6 x 20.

Esempi pratici della procedura per la formazione delle coppie di Goldbach e per la conseguente relazione di Goldbach :

$$G(N - 2) + G(N + 2) \approx G(N) \quad \text{con N di forma } N = 6k$$

$N = 120 = 6 \times 20$, $N - 2 = 118$, $N + 2 = 122$

Premesso che la formazione delle coppie di Goldbach, per qualsiasi numero $N > 4$ dipende quasi esclusivamente dai multipli dispari di 3 e dai composti c fino ad N, dai numeri primi fino ad N, e cioè $\pi(N)$, e dalla forma aritmetica di N, che può essere di forma N = 6k -2, 6k , e 6k+2 (queste tre forme coprono tutti i numeri pari, anche 2 = 6 x 0 +2, 4= 6 x 1- 2, 6 = 6 x 2, e così via all'infinito e al crescere di k tra i numeri naturali), vediamo come costruire tutte le coppie di Goldbach p e q tali che p + q = N, col metodo delle due colonne p e q simmetrici rispetto ad $\frac{N}{2} = 59$,
la semisomma di p + q, e che costituisce l'ultima coppia 59 + 59 = 118 = N; indicheremo con 3k i multipli dispari di 3, e che sono circa $\frac{N}{6}$, con c i vari altri numeri composti e con "p" e "q" i numeri primi che costituiscono le coppie di Goldbach oppure no (quando un valore di 3k si accoppia con un numero primo p oppure q - questi ultimi sulle rispettive colonne - e tutti i tipi di numeri, se nello stesso rigo, e quindi parte di una stessa coppia, che sia di Goldbach o no, sono simmetrici rispetto a $\frac{N}{2}$) .

N = 118 con semisomma $\frac{118}{2} = 59$

p +	q	= N - 2 (i numeri primi sono sottolineati)
1	117	1 e 117 coppia impropria (1 in questo caso non è considerato primo, 117 = 3 x 39 = c)
$\underline{3}$	115	3 primo p, 115 = 23 x 5 = c, composto
$\underline{5}$	$\underline{113}$	5 = p, 113 = q, prima coppia di Goldbach poiché $\underline{5} + \underline{113}$ = N = 118
$\underline{7}$	111	più brevemente, 7 = p e 111 = 3k = 3 x 37
9	109	3k e q
$\underline{11}$	$\underline{107}$	p e q, seconda coppia di Goldbach

13	**105**	**p e 3k**
15	**103**	**3k e q**
17	**101**	**p e q, terza coppia di Goldbach**
19	**99**	**p e 3k**
21	**97**	**3k e q**
23	**95**	**p e c , poiché 95 = 5 x 19**
25	**93**	**c e 3k**
27	**91**	**3k e c**
29	**89**	**p e q, quarta coppia di Goldbach**
31	**87**	**p e 3k**
33	**85**	**3k e c**
35	**83**	**c e q**
37	**81**	**p e 3k**
39	**79**	**3k e q**
41	**77**	**p e c**
43	**75**	**p e 3k**
45	**73**	**3k e q**
47	**71**	**p e q, quinta coppia di Goldbach**

49 69 c e 3k

51 <u>67</u> 3k e q

<u>53</u> 65 p e 3k

55 63 c e 3k

57 <u>61</u> 3k e q

<u>59</u> <u>59</u> p e q, <u>sesta coppia di Goldbach</u>

Quindi G(120 - 2) = G(118) = 6, sei coppie di Goldbach

Formiamo ora le coppie di Goldbach per N = 120 = 6 x 20, con più accoppiamenti tra numeri 3k tra di loro e con c, e quindi con più coppie di Goldbach rispetto ai due numeri pari vicini 118 e 122:

N = 120, con semisomma $\frac{120}{2} = 60$

p + q = N		
1	**119**	**1 e c , coppia impropria**
<u>3</u>	**117**	**p e c**
<u>5</u>	**115**	**p e c**
<u>7</u>	**<u>113</u>**	**p e q, <u>prima coppia di Goldbach</u>**
9	**111**	**3k e 3k (coppia di multipli di 3)**
<u>11</u>	**<u>109</u>**	**p e q, <u>seconda coppia di Goldbach</u>**
<u>13</u>	**<u>107</u>**	**p e q, <u>terza coppia di Goldbach</u>**
15	**105**	**3k e 3k, altra coppia di multipli di 3**

<u>17</u>	<u>103</u>	p e q, <u>quarta coppia di Goldbach</u>
<u>19</u>	101	p e q, <u>quinta coppia di Goldbach</u>
21	99	3k e 3k, altra coppia di multipli di 3
<u>23</u>	<u>97</u>	p e q, <u>sesta coppia di Goldbach</u>
25	95	c e c
27	93	3k e 3k, altra coppia di multipli di 3
<u>29</u>	91	p e c
<u>31</u>	<u>89</u>	p e q , settima coppia di Goldbach
33	87	3k e 3k, altra coppia di multipli di 3
35	85	c e c
<u>37</u>	<u>83</u>	p e q, <u>ottava coppia di Goldbach</u>
39	81	3k e 3k, altra coppia di multipli di 3
<u>41</u>	<u>79</u>	p e q , <u>nona coppia di Goldbach</u>
<u>43</u>	77	p e c
45	75	3k e 3k, altra coppia di multipli di 3
<u>47</u>	<u>73</u>	p e q, <u>decima coppia di Goldbach</u>
49	<u>71</u>	c e p
51	69	3k e 3k, altra coppia di multipli di 3
<u>53</u>	<u>67</u>	p e q, <u>undicesima coppia di Goldb</u>.

55 65 c e c

57 63 3k e 3k altra coppia di multipli di 3

<u>59</u> <u>61</u> p e q <u>dodicesima coppia di Goldb</u>.
<u>e anche coppia di primi gemelli</u>

Quindi G(120) = 12, il doppio rispetto a 6 di G(118), per via delle

coppie di multipli di 3, che lasciano più possibilità ai numeri primi fino a 120 di accoppiarsi tra loro formando più coppie di Goldbach.
Cosa che non succede per N – 2 = 120 – 2 = 118, e non accade nemmeno per N + 2 = 122 poiché entrambi non sono di forma 6k.
Infatti, per N + 2 = 122, abbiamo:

p + q = N + 2		
1	**121**	**coppia impropria**
<u>3</u>	**119**	**p e c**
<u>5</u>	**117**	**p e 3 k**
<u>7</u>	**115**	**p e c**
9	**113**	**3k e q**
<u>11</u>	**111**	**p e 3k**
<u>13</u>	**<u>109</u>**	**p e q, <u>prima coppia di Goldbach</u>**
15	**<u>107</u>**	**3k e q**
<u>17</u>	**105**	**p e 3k**
<u>19</u>	**<u>103</u>**	**p e q, <u>seconda coppia di Goldbach</u>**

21	101	3k e q
23	99	p e 3k
25	97	c e p
27	95	3k e c
29	93	p e 3k
31	91	p e c
33	89	3k e q
35	87	c e 3k
37	85	p e c
39	83	3k e q
41	81	p e 3k
43	79	p e q , terza coppia di Goldb.
45	77	3k e c
47	75	p e 3k
49	73	c e q
51	71	3k e c
53	69	p e 3k
55	67	c e q
57	65	3k e c

<u>59</u> **<u>59</u>** **p e q, <u>quarta coppia di Goldbach</u>**

Quindi, G(122) = 4, sempre per lo stesso motivo; i multipli dispari di 3 si accoppiano con i numeri primi ostacolando la formazione delle coppie di Goldbach, cosa che non succede per N = 6k

Vediamo ora la relazione di Goldbach:

$$G(118) + G(122) = G(120)$$
$$6 + 4 = 10 \approx 12$$

Ne consegue che non potrà essere mai G(N) = 0, condizione valida solo per N = 2, poiché solo questo numero non è preceduto da multipli di 3 e da numeri primi, e infatti la congettura vale a partire da 4, preceduto da 3 = 3 x 1, e dai numeri primi 2 e 3 , con l'unica coppia di Goldbach p + q = 2 + 2 = 4, l'ovvio unico caso in cui nelle coppie di Goldbach compare il 2; infatti tutti gli altri numeri primi sono dispari, e la somma di due numeri dispari, com'è noto, è sempre pari; se i due numeri dispari sono anche entrambi primi, essi formano una coppia di Goldbach col meccanismo sopra illustrato con i tre esempi per 118, 120 e 122, insieme alla relazione di Goldbach.

ESEMPIO PER LA FORMAZIONE DELLE T(n) TERNE DI GOLDBACH PER LA CONGETTURA DEBOLE DI GOLDBACH r + p + q = N' dispari uguale o maggiore di 7

N' = 61

Si sottraggono ad N successivamente tutti i π(N) numeri primi r da 3 ad un massimo di r = N - 4, ottenendo altrettanti numeri pari S già somma, per la congettura di Goldbach forte, di due numeri primi p + q = S. Si formano così tutte le possibili terne r + p + q =N', ma essendo metà di queste terne ripetizioni dell'altra metà (cambia l'ordine degli stessi tre numeri primi), occorre dividere per due il numero totale di terne trovate, ottenendo tutte le terne diverse tra loro); ma facciamo l'esempio per N' = 63

per r = 3, S = N' – r = 63 – 3 = 60, con le coppie di Goldbach

per S = 60 abbiamo G(S) = G(60) = 6 coppie di Goldbach p + q, vedi "Lavori del Prof. Di Maria" sezione Tabulati , G1 e G2:
cosicché avremo le seguenti 6 terne per r = 3:
r + p + q = N'

3 + 7 + 53
3 + 13 + 47
3 + 17 + 43
3 + 19 + 41
3 + 23 + 37
3 + 29 + 31

e abbiamo le prime = sei terne di primi la cui somma è N = 63;

Per r = 5, S = N' – r = 63 – 5 = 58, G(58) = 4

r + p + q = N

5 + 5 + 53
5 + 11 + 47
5 + 17 + 41
5 + 29 + 29

e abbiamo altre quattro terne;

per r = 7, S = 63 - 7 = 56, con tre coppie di Goldbach:

r + p + q = N'

7 + 3 + 53 R (ripetizione della 3 + 7 + 53)
7 + 13 + 43
7 + 19 + 37

abbiamo altre tre terne;

per r = 11, S = 63 – 11 = 52, con tre coppie di Goldbach:

<u>r + p + q = N’</u>

11	+	5	+	47	R (ripetizione di 5 +11 + 47)
11	**+**	***11***	**+**	***41***	
11	**+**	***23***	**+**	***29***	

e abbiamo altre tre terne;

per r = 13, S = 63 – 13 = 50, con quattro coppie di Goldbach

<u>r + p + q = N’</u>

13	+	3	+	47	R (ripetizione della 3 + 13 + 47)
13	+	7	+	43	R (ripetizione della 7 + 13 + 43)
13	**+**	***13***	**+**	***37***	
13	**+**	***19***	**+**	***31***	

abbiamo altre quattro terne;

per r = 17, S = 63 – 17 = 46, con quattro coppie di Goldbach

<u>r + p + q = N’</u>

17	+	3	+	43	R (ripetizione della 3 + 17 + 43)
17	+	5	+	41	R (ripetizione della 5 + 17 + 41
17	**+**	***17***	**+**	***29***	
17	**+**	***23***	**+**	***23***	

abbiamo altre quattro terne ;

per r = 19, S = 63 – 19 = 44, con tre coppie di Goldbach;

<u>r + p + q = N’</u>

19	+	3	+	41	R (ripetizione della 3+19+41)
19	+	7	+	37	R (ripetizione della 7 + 19 + 37)
19	+	13	+	31	R (ripetizione della 13 + 19 + 31)

abbiamo altre tre terne :

per r = 23, S = 63 – 23 = 40, con tre coppie di Goldbach

più brevemente:

23 + 3 + 37 R (ripetizione della 3 + 23 + 47)
23 + 11 + 29 R (ripetizione della 11 + 23 + 29)
23 + 17 + 23 R (ripetizione della 17 + 17 + 23)

per r = 29 , S = 63 – 29 = 34, con quattro coppie di Goldbach;

29 + 3 + 31 R (ripetizione della 3 + 29 + 31)
29 + 5 + 29 R (ripetizione della 5 + 29 + 29)
29 + 11 + 23 R (ripetizione della 11 + 23 + 29)
29 + 17 + 17 R (ripetizione della 17 + 17 + 29)

per r = 31, S = 63 – 31 = 32, con due sole coppie di Goldbach;

31 + 3 + 29 R (ripetizione della 3+29+31)
31 + 13 + 19 R (ripetizione della 13 + 19 + 31)

Per r = 37, S = 63 – 37 = 26, con tre coppie di Goldbach;

37 + 3 + 23 R (ripetizione della 3 + 23 + 47)
37 + 7 + 19 R (ripetizione della 7 + 19 + 37)
37 + 13 + 13 R (ripetizione della 13 + 13 + 37)

per r = 41, S = 63 – 41 = 22, con tre coppie di Goldbach;

41 + 3 + 19 R (ripetizione della 3 + 19 + 41)
41 + 5 + 17 R (ripetizione della 5 + 17 + 41)
41 + 11 + 11 R (ripetizione della 11 + 11 + 41)

per r = 43, S = 63 - 43 = 20, con due coppie di Goldbach;

43 + 3 + 17 R (ripetizione della 3 + 17 + 43)
43 + 7 + 13 R (ripetizione della 7 + 13 + 43)

per r = 47, S = 63 - 47 = 16, con due coppie di Goldbach;

47 + 3 + 13 R (ripetizione della 3 +13 +47)
47 + 5 + 11 R (ripetizione di 5 + 11 + 47)

per r = 53, S = 63 – 53 = 10, con due coppie di Goldbach;

53 + 3 + 7 R (ripetizione della 3 + 7 + 53)
53 + 5 + 5 R (ripetizione della 5 + 5 + 53)

per r = 59, S = 63 - 59 = 4, con una sola coppia di Goldabch;

59 + 2 + 2

Il numero primo 61 precedente N’ = 63 non si considera, essendo la Loro differenza S = 63 – 61 = 2, minore del minimo 4 per la congettura di Goldbach, e che ovviamente non ha nessuna coppia di Goldbach.

In totale abbiamo quindi 49 terne di numeri primi r + p + q = 63. dalle quali togliere quelle ripetute (30 terne poco più della metà) , e contrassegnate con la lettera R (Ripetizione/permutazione di una terna precedente) per essere, le rimanenti 19 terne, tutte diverse l’una dall’altra, e quindi terne effettive che soddisfano la congettura di Goldbach debole per un qualsiasi numero dispari N’ $\geq$ 7, che nel nostro esempio è N’ = 63.

Le diciannove terne effettive e rimaste sono quindi quelle scritte in corsivo:

3 + 7 + 53 = 63
3 + 13 + 47 …
3 + 17 + 43 …
3 + 19 + 41 …
3 + 23 + 37 …
3 + 29 + 31 …
5 + 5 +53 …
5 + 11 + 47 …
5 + 17 + 41 …
5 + 29 + 29 = 63

7 + 13 + 43 …
7 + 19 + 37 …
11 + 11 + 41 …
11 + 23 + 29 …
13 +13 + 37 …
13 + 19 + 31 …
17 + 17 + 29 …
17 + 23 + 23 …
59 + 2 + 2 …

Il procedimento ovviamente è identico per qualsiasi numero dispari N ≥ 7; ora la forma aritmetica del numero N' non ha importanza (l'aveva invece per Goldbach forte, perché un numero pari S = 6k ha più coppie di Goldbach di S = 6k±2) ; ora invece un numero dispari N' ≥ 7 ha più terne T(N') solo se tra i numeri pari S ottenuti da S = N' – r ce ne sono alcuni di forma S = 6k, poiché essi hanno più coppie di Goldbach e quindi si formano più terne . Per N' = 63 del nostro esempio, il solo numero S di forma S = 6k è 60 = 6 x 10, ma per altri numeri dispari ce ne possono essere di più, per es. per N' = 65 ci sono S = 60, 54, 48, 42, 36, 24, 18, 12, 6, e quindi 65 può avere più terne rispetto a 63, numero dispari precedente a 65. Ma lasciamo ad altri tale facile verifica tramite la nostra procedura sopra indicata. Ovviamente, risulta chiaro che per la congettura debole di Goldbach, le terne di numeri primi risultano più numerose delle coppie di Goldbach per i numeri pari adiacenti:
infatti G(62) = 3 e G(64) = 5 coppie di Goldbach, mentre per il numero dispari 63 del nostro esempio, compreso tra 62 e 64, ci sono, come abbiamo visto nel nostro esempio,T(63) = 19 terne di Goldbach.

Una formula molto approssimativa per trovare T(N') è data dalla somma di tutte le coppie di Goldbach per tutti i numeri pari S = N' – r (con r variabile tra 3 ed N'-4 se N' – 4 è anch'esso primo, e quindi variabile tra circa tutti i π(N') numeri primi fino ad N', e il risultato poi sarà diviso per due. Per esempio, per N = 63 – r abbiamo 49 coppie di Goldbach, la cui metà è $\frac{49}{2}$ = 24, 5, valore molto prossimo a 19, delle T(63) = 19 terne di numeri primi con somma N' = r + p + q = 63, come da congettura debole di Goldbach.

Per l'esempio N' = 21 del lavoro "I numeri primi in cerca d'autore"

(Gen1) avevamo trovato 10 coppie di Goldbach e T(21) = 5 terne di Goldbach debole, con rapporto questa volta esatto $\frac{10}{2} = 5$.

Quindi, in generale,

$$T(N') \approx \sum_{4}^{S} \frac{G(S)}{2} \text{ , con buona approssimazione}$$

con in questo caso S minimo = 4 ed S massimo = N – 3 = 63 – 3 = 60

Infatti, per N' = 63, S = 63 – 3 = 60, e 4 = 63 -59 è il numero pari S più piccolo che abbia una sola coppia di Goldbach

$$T(N') = T(63) \approx \frac{49}{2} = 24,5 \text{ valore stimato} \approx 19 \text{ valore reale}$$

Ovviamente, nemmeno T(N') assume mai il valore 0 come contro esempio, crescendo più veloce di G(N) che gia non lo assume mai, essendo G(N) $\geq$ 1, e quindi anche T(N') $\geq$ 1 .
Già T(7) = 1 poichè la sola terna possibile è 2 + 2 + 3 = 7, per N' = 9 abbiamo 3 +3 +3 = 9, per 11 abbiamo le due terne 3 + 3 + 5 = 11 e 7 + 2 +2 = 11, quindi già T(11) = 2 terne, e così via, T(N') cresce al crescere di N' come anche G(N) cresce al crescere di N, sebbene, come abbiamo visto con gli esempi per 21 e per 63, più lentamente di T(N'). Quindi le due congetture sono vere, e poichè la congettura di Goldbach debole è un sottoproblema della GRH, la nostra soluzione può costituire un buon indizio per la sua verità, e di conseguenza anche per la RH, il caso più semplice della GRH.

GRUPPO ERATOSTENE