

**CONGETTURE SUI NUMERI
PRIMI ANCORA APERTE
(Le nostre soluzioni e le loro possibili
e utili conseguenze: RSA, RH)**

RIASSUNTO

In questo lavoro proponiamo le nostre soluzioni per le questioni ancora aperte sui numeri primi, elencate da Chris Caldwell nel suo famoso sito:

<http://primes.utmedu/notes/conjectures/> ,

e qui sinteticamente tradotte, esponendo alla fine le nostre soluzioni, ancorché parziali, sull'ipotesi di Riemann e la fattorizzazione veloce (non accennate nell'elenco di Caldwell, pur essendo anch'esse ancora aperte e concernenti i numeri primi), e conseguenze indirette delle nostre soluzioni per la congettura di Goldbach e dei numeri primi gemelli.

INTRODUZIONE

Riporteremo inizialmente la traduzione delle pagine di Caldwell sulle questioni aperte (Prime Conjectures and Open Questions), per poi esporre brevemente le nostre proposte di soluzioni e/o le indicazioni dei nostri lavori che le riguardano, e reperibili sul nostro e/o su altri siti web, per una più facile reperibilità e consultazione.

“ Congiecture sui Numeri Primi e Questioni Aperte“

- 1) **Congiecture di Goldbach : ogni pari $n > 2$ è la somma di due primi**
- 2) **Problema di Goldbach sui Numeri Dispari: ogni dispari $n > 5$ è la somma di tre primi...**
- 3) **Ogni numero dispari è la differenza di due primi.**
- 4) **Per ogni numero pari $2n$ ci sono infinite coppie di numeri primi consecutivi con differenza $2n$.**
- 5) **Congiecture dei primi gemelli: ci sono infiniti numeri primi gemelli**
- 6) **Ci sono infiniti numeri primi di forma $n^2 + 1$?**
- 7) **I numeri primi di Fermat sono finiti**
- 8) **C'è sempre un numero primo tra n^2 e $(n+1)^2$?**

La *prima questione* riguarda la famosa congettura di Goldbach, da noi affrontata con qualche buon risultato: il ruolo dei multipli dispari di 3 nella formazione delle coppie di Goldbach, ora totalmente compresa. I multipli dispari di 3 facilitano la formazione delle coppie di Goldbach per $N = 6n$, poichè si eliminano tra di loro facilitando la formazione delle coppie di Goldbach tra i numeri primi, mentre per $N = 6n \pm 2$ tale formazione viene

ostacolata (alcuni multipli di 3 si accoppiano con altrettanti numeri primi, diminuendo così il numero totale delle coppie di Goldbach, maggiore per i numeri pari multipli di 6, per i quali i multipli dispari di 3 si accoppiano tra loro e anche i numeri primi, formando così più coppie di Goldbach che per i numeri pari non multipli di 6), dando luogo alla nostra “relazione di Goldbach”:

$$G(N+2) + G(N-2) \approx G(N) \text{ con } N = 6n \quad (1)$$

La formula nota per il calcolo del numero di coppie di Goldbach è

$$G(N_{\pm 2}) \approx (N_{\pm 2}) / (\ln(N_{\pm 2}))^2, \quad (2)$$

mentre per $N = 6n$ è invece

$$G(N) \approx N / (\ln N)^2 \quad (3)$$

Chè dà risultati, sia pure approssimati per difetto pari a circa il doppio della (1), dando luogo alla “relazione di Goldbach” prima accennata (1). In tal modo le oscillazioni dei valori di $G(N)$ e di $G(N_{\pm 2})$ sono spiegate, e con esse anche l’impossibilità di contro esempi $G(N) = 0$, poiché $G(N)$ cresce proporzionalmente con $N > (N)$ qui inteso in generale, cioè sia di forma $6n$ che di forma $6n_{\pm 2}$ (tale forma copre tutti i numeri pari). Per tutto quanto sopra, la congettura di Goldbach è vera.

Riferimenti (lavori reperibili sul nostro sito, in caso contrario i siti sono indicati).

1. “Procedure per la formazione delle coppie e delle terne di Goldbach”.
2. “Proposte Goldbach: insiemi sparsi e intervalli corti”
3. “Sulle spalle dei giganti” e “Goldbach, Twin prime and Polignac” per quanto riguarda le connessioni Goldbach Riemann (Ipotesi RH equivalenti)
4. “Numeri primi in cerca d’autore”
5. “Tabulati e risultati” vedi sezione “Lavori del Prof. Di Maria” per quanto riguarda i calcoli per di $G(N)$ fino a $N = 10\,000$, e le effettive coppie di Goldbach fino a $N = 1\,000$.
5. Per i vari contributi dell’Ing. Rosario Turco alla congettura di Goldbach, si veda anche il suo sito <http://geocities.com/SiliconValley/Port/3264> e il Suo BlocNotes: <http://MATHBuildingBlock.blogspot.com>
6. Altri nostri articoli su Goldbach sono reperibili sul sito del Dott. Michele Nardelli: <http://xoomer.alice.it/stringtheory>

La *seconda questione* riguarda la congettura debole di Goldbach, con n dispari come somma di tre numeri primi p , q ed r tali che:

$$n = p + q + r$$

Riferimenti

1. Come per la questione precedente, e
2. “I numeri primi gemelli e l’ipotesi di Riemann generalizzata” vedi sezione “Lavori della Prof. Tulumello”.

La **terza questione** è inesatta, poiché la differenza tra due numeri dispari (e quindi anche tra numeri primi) è sempre pari, (vedi successiva questione sulla congettura di Polignac), a meno che uno dei due numeri primi sia 2 pari, ma questo la terza questione non lo specifica.

La **quarta questione** riguarda la congettura di Polignac, estensione della congettura dei numeri gemelli tramite la differenza $q - p = 2$ alla differenza $D = q - p = 2n$, ottenuta anche dalle forme $p = 6m \pm 1$ e $q = 6n \pm 1$:

$$D = q - p = 6n \pm 1 - (6m \pm 1) = 6n - 6m \pm 1 \pm 1 =$$

$6(n - m) \pm 2 = 6r \pm 2$, oppure $6r$ se i segni sono diversi; (D per non confonderla con la semidifferenza $d = D/2$ relativa alla successiva "**fattorizzazione veloce**): in ogni caso $6r \pm 2$ e $6r$ sono sempre pari. Da questa formula è escluso il numero primo 2, perché pari, e la differenza tra un numero dispari e un numero pari è sempre dispari; ma tutti gli infiniti numeri primi sono dispari, con la sola eccezione del 2, che non è di forma $6n \pm 1$; neanche il 3 lo è, però è dispari e anche primo, e quindi rientra nella congettura di Polignac.

Riferimenti

Come per la prima questione, e anche:

1. "Forme $6k' - 2$, $6k'$ e $6k' + 2$ delle possibili differenze tra due numeri primi consecutivi"
2. "Numeri primi con cifre finali uguali" vedi sezione "Lavori del prof. Di Maria" (tale differenza è sempre di forma $d = 10n$, e quindi sempre pari).

La *quinta questione* riguarda i numeri primi gemelli (vedi precedente questione 4) sulla congettura di Polignac, e relativi riferimenti, e anche .

1) “ I numeri primi gemelli e l’ipotesi generalizzata di Riemann generalizzata” vedi sezione “Lavori della prof. Tulumello” dove, tra l’altro, si paragona la nostra dimostrazione per assurdo con un’analogha dimostrazione di due matematici cinesi.

La *sesta questione* riguarda i numeri di Landau, di forma $L(n) = n^2 + 1$, e da noi recentemente risolta positivamente (i numeri di Landau, seppure molto rari, sono infiniti.

Riferimenti

1 “I numeri di Landau e la congettura di Legendre” (in inglese), dove dimostriamo che sono infiniti e sono connessi all’ipotesi di Riemann come ipotesi RH equivalente .

La *settima questione* riguarda i numeri primi di Fermat (se sono infiniti oppure no).

Questa rimane l’unica questione ancora aperta tra quelle elencate da Chris Caldwell nelle sue “Primepages”, e la sua soluzione sembra essere negativa. Su questo argomento, e la possibile non infinità di tali numeri primi, abbiamo una recente notizia, tratta dal libro di Ian Stewart” La bellezza della verità – Storia della simmetria” (Einaudi) pag. 148:

“... quali sono i numeri di Fermat? I primi tre li abbiamo già visti: 3, 5 e 17. I due successivi sono molto più grandi, 257 e 65 537. E poi basta, non se ne conoscono altri. Nessuno è mai riuscito a dimostrare che esistono, oppure che non esistono. Per quel che se ne sappia, il prossimo, eventuale numero di Fermat deve essere maggiore o uguale a $(2^{33554432}) + 1$, con $33554432 = 2^{25}$, che ha più di dieci milioni di cifre.”

Riferimenti

1. ” Numeri primi di Fermat, numeri primi di Mersenne e numeri di Collatz”

L’ultima e *ottava questione* riguarda la congettura di Oppermann, anche questa da noi risolta, considerano che al crescere di n l’intervallo tra due quadrati successivi si fa sempre più ampio, super subito il logaritmo di n (frequenza media dei numeri primi) e quindi tra di essi c’è sempre più spazio per sempre più numeri primi. Anche qui, non esiste contro esempio $O(n) = 0$, con $O(n)$ il numero di numeri

primi tra n^2 ed $(n+1)^2$. Per esempio, per $n = 100$, tra 10 000 e 10 201 ci sono $2n+1 = 2 \times 100 + 1 = 201$ numeri, e poiché il logaritmo naturale di 10 000 è $\ln 10\,000 = 9,21$ dividendo 201 per 9,21 abbiamo circa $201 / 9,21 = 21,82 \approx 21$ numeri primi; in realtà ce ne sono 23 (dal 10 007 al 10 193). Ma già a cominciare dai numeri n più piccoli, per esempio 2. tra 4 e 9 ci sono i due numeri primi 5 e 7, per $n = 3$ tra 9 e 16 ci sono i due numeri primi 11 e 13, per $n = 4$ tra 16 e 25 ci sono i tre numeri primi 17, 19, e 23, e così via al crescere di n , il numero $O(n)$ cresce sempre con n , con qualche piccola irregolarità, per esempio per $n = 5$ tra 25 e 36 ci sono soli due numeri

primi 29 e 31, mentre per $n = 4$ tra 16 e 25, già visto ce ne sono già tre, uno in più dei due numeri primi tra 25 e 36.

Riferimenti

1. “Congettura di Oppermann”.
2. “Soluzione unificata per alcune congetture sul numero dei primi un certo intervallo” (Cramer, Oppermann, Legendre, Bertrand) Sezione “Lavori della Prof. Tulumello.

Tra le otto questioni ancora aperte indicate da Chris Caldwell nel suo elenco, mancano però la fattorizzazione veloce (sottoproblema del problema del millennio $P=NP$), l'ipotesi di Riemann, e la congettura di Levy.

Per quanto riguarda la *fattorizzazione veloce*, o almeno più veloce di quella classica ($N/p = q$ con p tentativi) abbiamo proposto il polinomio

$N + d^2 = s^2$, con $N = p \times q$, $p = s - d$ e $q = s + d$ con d tentativi, dove d è semidifferenza $d = (q-p)/2$ e q la semisomma $s = (p + q)/2$, e qui c'è la connessione con la nostra soluzione di Goldbach: $S = 2s$ come somma $p + q$.

Riferimenti

1. “Numeri primi in cerca d'autore”
2. “Sulle spalle dei giganti” (Ipotesi RH - equivalenti, tra le quali una è basata anche sulla nostra soluzione per la congettura di Goldbach”
3. “Fattorizzazione con algoritmo generalizzato con quadrati perfetti in ambito delle forme $6k \pm 1$ ”
4. “Test di primalità, fattorizzazione e $Pi(n)$ con forme

$6k \pm 1$ ”

5.”La fattorizzazione veloce e il problema $P = NP$ ”

6. “Il Teorema di Pitagora e i numeri primi” a cura della Prof. Tulumello, di recente pubblicazione.

Per quanto riguarda invece *l'ipotesi di Riemann*, invece, abbiamo proposto una soluzione per l'ipotesi equivalente $RH1 = RH$, accennata in “Sulle spalle dei giganti”, lavoro dedicato a tutte le ipotesi note come RH equivalenti; per alcune di queste abbiamo proposto anche “I numeri primi di Landau e la congettura di Legendre” in inglese, e “Goldbach, Twin prime and Polignac”, in inglese.

Tra queste ipotesi RH – equivalenti ce ne potrebbero essere alcune più facili da risolvere, rispetto alla ben più difficile ipotesi RH basata sulla nota funzione zeta, connessa ai numeri primi e ai numeri complessi.

Risoltane una, anche tutte le altre sono automaticamente risolte, RH compresa, essendo tutte RH equivalenti.

Noi abbiamo trovato minori difficoltà con la RH1, vedi “Sulle spalle dei giganti” e relativi riferimenti, in seguito proveremo anche con altre ipotesi equivalenti.

Un'altra questione aperta è la *congettura di Levy*, da noi trattata in un omonimo articolo, di prossima pubblicazione. Tale ormai ex congettura è paragonabile alla congettura forte di Goldbach come formula di calcolo

$L(N) \approx G(N) \approx N / (\ln N)^2$ e alla congettura debole

di Goldbach come caso particolare

$N = p + 2q$, scrivibile anche come $N = p + q + q$ e quindi come somma di tre primi (la congettura debole di Goldbach e la congettura di Levy consentono le ripetizioni).

Anche la congettura di Levy potrebbe essere usata come base per una nuova ipotesi RH – equivalente, cosa che faremo in prossimo futuro, dopo averla trasformata in Teorema di Levy.

Soluzione per la congettura forte di Goldbach, quindi, come base per il nostro polinomio per una fattorizzazione più veloce (ora i tentativi passano da p a d , con d più piccolo di p per i numeri RSA, e quindi le difficoltà connesse ai tempi di calcolo sono considerevolmente minori, in genere di quasi più della metà, ancora riducibili con eventuali futuri miglioramenti del polinomio da noi proposto, basato sulla nostra soluzione della congettura forte di Goldbach).

Mentre, oltre a questa, anche le nostre soluzioni per la congettura debole di Goldbach, dei numeri primi gemelli e di Polignac sono state utilizzate come base per nuove ipotesi RH equivalenti, così come le nostre soluzioni per la congettura di Legendre e quella di Landau.

CONCLUSIONE

Rimane così aperta soltanto la congettura sull'infinità o meno dei numeri primi di Fermat, però con orientamento generale, anche nostro, verso una soluzione negativa:

i numeri primi di Fermat sono finiti, in numerosi cinque, a al massimo sei se anche il numero già citato

$2^{33554432} + 1$ fosse anch'esso numero primo, cosa di cui non si è ancora sicuri. Questa congettura sarà sicuramente risolta in futuro, quando si potranno certificare come primi numeri come questo, con più di dieci milioni di cifre (anche se con tale certificazione si ottiene soltanto che i numeri primi di Fermat noti saranno sei, e non più cinque come si è pensato fino ad ora. Un eventuale settimo numero primo di Fermat sarebbe veramente enorme, con centinaia di milioni o addirittura con qualche miliardo di cifre).

Ma i problemi del Millennio per ora sono altri ($P = NP$ con *fattorizzazione veloce* come caso particolare) e *ipotesi di Riemann, RH*. E le nostre soluzioni per alcune delle questioni ancora aperte, potrebbero benissimo spianare un po' la strada, in futuro, a questi due grossi problemi matematici connessi ai numeri primi (l'altro terzo problema è la congettura di Birch e Swinnerton – Dyer), mentre gli altri problemi del millennio riguardano com'è noto, l'algebra, la fisica, ecc. .

Caltanissetta 10.2.2009

GRUPPO ERATOSTENE

