

DIMOSTRAZIONE DELLA CONGETTURA DI COLLATZ

(Già pubblicato sulla rivista METODO n° 22-2006
Al sito http://geocities.com/ga_57/metodo22.html)

Abstract

Of Collatz's Conjecture proof.

The calculation about Collatz's Conjecture ends always with odd number 1 because for any initial number "n" of "3n + 1", this calculation before or after, meets some "number of Collatz"

$$c_j = \frac{2^m - 1}{3} = \frac{2^{2^j} - 1}{3} = 4 \cdot c_{j-1} + 1$$

These numbers precede always 2^m with m even number.

Collatz's numbers and 2^m are infinite numbers, so, for any "n" initial number of "3n + 1", the calculation ends always with final odd number 1, at once in the calculation appears a Collatz's number followed by a 2^m number with "m" even number, and

$\frac{2^m}{2}$ till final odd number 1.

‘ERATOSTENE’

L'algoritmo della congettura di Collatz, già ben nota ai matematici anche con altri nomi (problema del 3n + 1, problema di Syracuse, problema di Katukani, procedura di Hasse, problema di Ulam) e che asserisce che a partire da qualsiasi numero intero positivo n, la ripetizione di questa funzione alla fine produce sempre il valore 1 (con

la sequenza finale ...4...2...1), effettivamente termina in questo modo per tutti gli infiniti n interi positivi.

DIMOSTRAZIONE

Quale che sia il numero n testato con l'algoritmo di Collatz ($3n + 1$: se pari si divide per due fino a ottenere un numero dispari $n' > 1$, se dispari si ricomincia con $3n' + 1$), si ottiene una serie di numeri (numeri di Hallstone); se osserviamo questa serie a ritroso, e cioè dal basso verso l'alto se essa costituisce una colonna numerica, o da destra a sinistra se invece è una lista numerica orizzontale, ci accorgiamo che essa passa sempre da una potenza pari di 2, cioè 2^m con m pari, preceduta da un numero c_j di forma $(2^m - 1)/3 = (2^{2^j} - 1)/3$.

Chiameremo questi numeri c 'numeri di Collatz, che sono infiniti, e sono di forma $c_j = (2^m - 1)/3$, ma anche $c_j = 4 \cdot c_{j-1} + 1$, dove c_{j-1} è il numero di Collatz precedente nella serie c_j , come vedremo.

Ogni numero di Collatz precede una potenza m pari di 2; a partire dalla quale il ciclo numerico "collassa" rapidamente verso il numero 1, e quindi verso la fine del ciclo, perché solo le potenze di 2, essendo i soli numeri pari che divisi successivamente per due, danno sempre numeri pari, fino all'unico numero dispari 1 che segna la fine del ciclo.

Altri numeri pari non potenze di 2, infatti, divisi una o più volte per 2, danno alla fine un numero dispari n' maggiore di 1, e il ciclo $3n' + 1$ ricomincia.

Esempio unico per tutti:

$$\text{per } n = 36, \quad = 9 \cdot 4 = 9 \cdot 2^2,$$

$$36/2 = 18$$

$$18/2 = 9 \quad (\text{numero dispari} > 1)$$

$$9 \cdot 3 + 1 = 28$$

$$28/2 = 14$$

$$14/2 = \underline{7} \quad (\text{numero dispari} > 1)$$

$$7 \cdot 3 + 1 = 22$$

$$22/2 = \underline{11} \quad (\text{numero dispari} > 1)$$

$$11 \cdot 3 + 1 = 34$$

$$34/2 = \underline{17} \quad (\text{numero dispari} > 1)$$

$$17 \cdot 3 + 1 = 52$$

$$52/2 = 26$$

$$26/2 = \underline{13} \quad (\text{numero dispari} > 1)$$

$$13 \cdot 3 + 1 = 40$$

$$40/2 = 20$$

$$20/2 = 10$$

$$10/2 = \underline{5} = \text{numero (dispari) di Collatz } c_2 = (2^4 - 1)/3 = (16 - 1)/3 = 15/3 = 5$$

$$5 \cdot 3 + 1 = 16 = 2^4 \quad 4 = m = \text{pari}$$

$$16/2 = 8 = 2^3 \quad = 2^{4-1}$$

$$8/2 = 4 = 2^2 \quad = 2^{4-2}$$

$$4/2 = 2 = 2^1 \quad = 2^{4-3}$$

$$2/2 = \underline{1} = 2^0 = \text{fine del ciclo (1 numero dispari finale)}$$

collasso finale

Da $16 = 2^4$ a 1 avviene il collasso finale, e 16 è preceduto dal numero di Collatz $c_2 = 5$
 $= (2^4 - 1)/3 = (16 - 1)/3 = 15/3 = 5$,

che è il secondo numero di Collatz e quindi $c_2 = 5$; il primo numero di Collatz è $c_1 = 1$, poiché $(2^m + 1)/3 = (2^2 - 1)/3 = (4 - 1)/3 = 3/3 = 1$,
con $m = 2 \cdot j$, e $c_2 = c_1 \cdot 4 + 1 = 1 \cdot 4 + 1 = 5$.

Ovviamente, ripetiamo, i numeri di Collatz sono infiniti, C_∞ , poiché anche le potenze
m pari di 2 e quindi 2^m sono infinite; e legate a c_j dalla formula

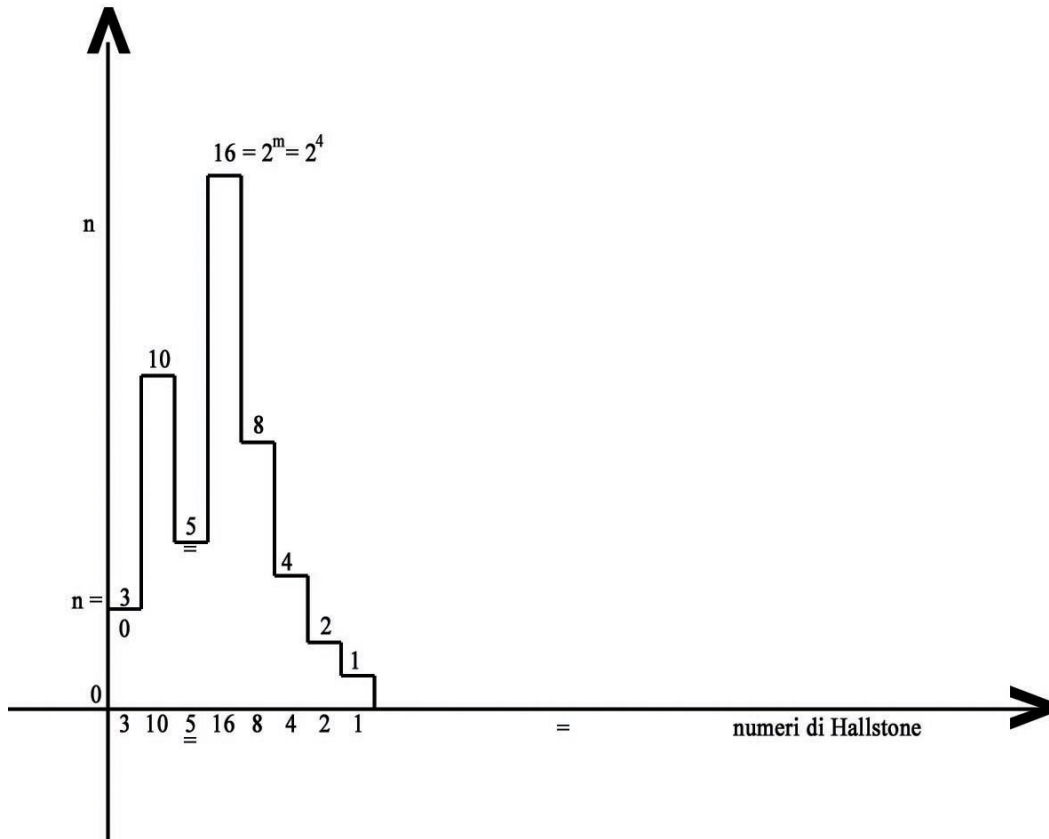
$c_j = (2^m - 1)/3$ con $m = 2 \cdot j$. E, di conseguenza, quale che sia n tra gli infiniti interi
positivi, l'algoritmo $3n + 1$ prima o poi incappa sempre in un qualsiasi numero di
Collatz e subito dopo in una potenza pari di 2, che fa automaticamente collassare il
ciclo numerico fino a 1.

Le potenze dispari d di 2 come tali fanno ugualmente collassare il ciclo,
(se $n = 2^d$) ma non sono precedute da un numero di Collatz perché $2^d - 1$ non è
divisibile per 3 (come invece lo è $2^m - 1$), e anzi può essere un numero primo, e i
numeri primi di forma $2^d - 1$ sono detti anche numeri primi di Mersenne se anche d è
primo). Esse appaiono solo nel "collasso" ($2^m/2 = 2^{m-1}$ con
 $m - 1 = d =$ numero dispari ma anche 2^{m-3} , ecc.

Facciamo una breve tabella dei primi 10 numeri di Collatz, per chiunque voglia
verificare al computer i calcoli $3n + 1$ per i primi 1000 n interi positivi, fino a
incontrare uno dei suddetti numeri di Collatz, seguiti da 2^m e quindi del collasso –
fine del ciclo. (ovviamente, per n sempre più grandi si incontreranno c_j sempre più
grandi).-

j	c_j	$(2^m - 1)/3$	=	$4 \cdot c_j + 1$	c_j
0	0	$2^0 - 1/3$	0/0	0	
1	1	$(2^2 - 1)/3$	3/3	$4 \cdot 0 + 1 =$	1
2	5	$(2^4 - 1)/3$	15/5	$4 \cdot 1 + 1 =$	5
3	21	$(2^6 - 1)/3$	63/3	$4 \cdot 5 + 1 =$	21
4	85	$(2^8 - 1)/3$	255/3	$4 \cdot 21 + 1 =$	85
5	341	$(2^{10} - 1)/3$	1023/3	$4 \cdot 85 + 1 =$	341
6	1365	$(2^{12} - 1)/3$	4095/3	$4 \cdot 341 + 1 =$	1365
7	5461	$(2^{14} - 1)/3$	16383/3	$4 \cdot 1365 + 1 =$	5461
8	21845	$(2^{16} - 1)/3$	65535/3	$4 \cdot 5461 + 1 =$	21845
9	87381	$(2^{18} - 1)/3$	262143/3	$4 \cdot 21845 + 1 =$	87381
10	349525	$(2^{20} - 1)/3$	1048575/3	$4 \cdot 87381 + 1 =$	349525
...

Esempio grafico per $n = 3$



5 numero di Collatz; $16 = 2^m = 2^4 =$ inizio del collasso.

Come si può notare, tutti i numeri di Collatz, a partire da 1, e tranne lo 0 iniziale $c_0 = 0$, finiscono alternativamente con la cifra 1 e la cifra 5, poiché, per la loro forma

$$c_j = c_{j-1} \cdot 4 + 1,$$

la cifra finale f di ogni numero c_j moltiplicata per 4 e con l'aggiunta di 1 dà sempre 5 se f è 1, e 1 se invece f è 5.

E' infine, qualsiasi n pari ovviamente collassa solo parzialmente fino ad un numero dispari d maggiore di 1, se n è uguale dà forma $n = d \cdot 2^s$, vedi esempio per $n = 36$.

Ovviamente, ripetiamo, i numeri di Collatz sono infiniti, C , poiché anche le potenze m pari di 2 e quindi 2^m sono infinite; e legate a C_d dalla formula

$c_{\alpha} = (2^m - 1)/3$ con $m = 2 \cdot i$. E' di conseguenza, quale che sia n tra gli infiniti interi positivi, l'algoritmo $3n + 1$ prima o poi incappa sempre in un qualsiasi numero di Collatz e subito dopo in una potenza pari di 2, che fa automaticamente collassate il ciclo numerico fino a 1.

Le potenze dispari di 2 come tali fanno ugualmente collassate il ciclo

(se $n = 2^d$), ma non sono precedute da un numero di Collatz perché $2^d - 1$ non è divisibile per 3 (come invece lo è lo è $2^m - 1$), e anzi può essere un numero primo, e i numeri primi di forma $2^d - 1$ sono detti anche numeri primi di Mersenne. Esse sono $2^m/2 = 2^{m-1}$ con $m - 1 = d =$ numero dispari ma anche 2^{m-3} , ecc.

Facciamo una breve tabella dei primi 10 numeri di Collatz, per chiunque voglia verificare al computer i calcoli $3n + 1$ per i primi 1000 n interi positivi, fino a incontrare uno dei suddetti numeri di Collatz, seguito da 2^m e quindi dal collasso-fine del ciclo.

(Ovviamente, per n sempre grandi si incontreranno c_j sempre più grandi).

Con l'interessante concetto di infiniti numeri di Collatz

$$c_j = \frac{2^m - 1}{3} = \frac{2^{2^i} - 1}{3} = 4 \cdot c_{j-1} + 1,$$

che precedono i numeri 2^m con m pari anch'essi infiniti, che fanno collassate il ciclo numerico fino a 1, e con la logica conseguenza che per qualsiasi n testato con l'algoritmo $3n + 1$, si incontra sempre, prima o poi, un qualsiasi numero di Collatz c_j , e successivamente il numero $2^m = 2^{2^i}$; da qui il ciclo finisce, e la congettura di Collatz è così definitivamente dimostrata.