

I NUMERI PRIMI E I FILTRI DI CHEBYSHEV

Gruppo Eratostene

Nel suo recente libro “L’ossessione dei numeri primi” (Ediz. Bollati Boringhieri), John Derbyshire parla del filtro di Chebyshev, a pag. 141:

“...Non posso lasciare Chebyshev senza almeno ricordare il suo famoso filtro (famoso almeno tra i teorici dei numeri, credo).

Se dividete un numero primo (diverso da 2) per 4, il resto deve essere 1 o 3. Hanno qualche preferenza i numeri primi? Sì, ce l’hanno: fino a $p = 101$ ci sono 12 resti uguali a 1 e 13 resti uguali a 3. Fino a $p = 1009$, il conto dà 81 e 87. Fino a $p = 10007$, si ha 609 e 620.

Com’è ovvio, i resti uguali a 3 hanno un margine leggermente superiore rispetto ai resti uguali a 1. Questo è un esempio di un filtro di Chebyshev, commentato per la prima volta dal matematico russo in uno scritto del 1853. questo particolare filtro viene poi violato per $p = 26861$, quando il resto 1 guadagna momentaneamente la prima posizione. Ma si tratta di un’anomalia soltanto temporanea: la prima vera zona di violazione è in corrispondenza degli 11 numeri primi nell’intervallo tra $p = 616877$ e $p = 617011$.

I resti pari a 1 conquistano il primato per soltanto 1939 dei primi 5,8 milioni di numeri primi, che rappresentano il limite al quale mi sono fermato (1939 è circa il 34°/0000 di 5.800.000, N.d.A.A.).

Non lo conquistano una sola volta negli ultimi 4.988.472 di questi numeri primi. Se il divisore è 3, il filtro ha un effetto ancora più drammatico. Qui, il resto (a partire da $p = 3$) può essere 1 o 2, e il filtro è a 2. Questo filtro non è violato, fino a $p = 608.981.813.029$.

Ora si che questo è un filtro! Questa violazione è stata individuata nel 1978, da Carter Bays e Richard Hudson. Avrò occasione di menzionare

ancora il filtro di Chebyshev nel capitolo 14”.

E a pag. 250:

“...Se i nomi di Bays e di Hudson vi dicono qualcosa, è perché li ho citati nel paragrafo 8.4 a proposito del filtro di Chebyshev.

Esiste in effetti un livello profondo, troppo profondo per parlarne ancora qui, in cui la tendenza di $Li(x)$ a essere maggiore di $\pi(x)$ ricorda il filtro di Chebyshev. Questi due argomenti sono in genere considerati insieme dai teorici di analisi dei numeri. In effetti, l’articolo di Littlewood del 1914 dimostrava non soltanto che la tendenza di $Li(x)$ ad essere maggiore di $\pi(x)$ è violata un numero infinito di volte, ma che questo è vero anche per i filtri di Chebyshev. Per alcune recenti intuizioni felici sull’argomento, si veda l’articolo “Chebyshev’s Bias”, di Michel Rubinstein e Peter Sarnak in “Experimental Mathematics”, 3(1994) pp. 173 - 97”.

Per vedere le connessioni di questo filtro con le forme $6n \pm 1$ dei numeri primi (tranne il 2 e il 3 iniziali), facciamo qualche esempio dividendo per 4, e poi anche per 3, i numeri primi iniziali (fino a $n = 10$) di forma $6n - 1$ e $6n + 1$.

Divisore 4

n	(numeri di forma $6n-1$)/4	resto	(numeri di forma $6n+1$)/4	resto
1	5/4 = 1	1	7/4 = 1	3
2	11/4 = 2	3	13/4 = 3	1
3	17/4 = 4	1	19/4 = 4	3
4	23/4 = 5	3	25/4 = 6	1*
5	29/4 = 7	1	31/4 = 7	3
6	35/4 = 8	3*	37/4 = 9	1

7	$41/4 = 10$	1	$43/4 = 10$	3
8	$47/4 = 11$	3	$49/4 = 12$	1*
9	$53/4 = 13$	1	$55/4 = 13$	3*
10	$59/4 = 14$	3	$61/4 = 15$	1
...

(i resti asteriscati si riferiscono ai numeri composti 25, 35, 49, 55, quindi non debbono essere conteggiati, come vedremo).

Si nota facilmente che tutti i numeri di forma $6n-1$, primi e composti che siano, hanno resti alternati 1, 3, 1, 3, 1, e così pure i numeri di forma $6n+1$, ma invertiti: 3, 1, 3, 1, 3, ... in eguale numero ($n = 10$) fino a $N = 61 = 6*10 + 1$.

Se però consideriamo soltanto i resti relativi ai numeri primi, come ha fatto Chebyshev (senza però la nostra distinzione tra quelli di forma $6n-1$ e quelli di forma $6n+1$), dobbiamo togliere i resti asteriscati, e otteniamo $10 - 1 = 9$ numeri primi e quindi 9 resti nella prima forma, e $10 - 3 = 7$ numeri primi e quindi 7 resti nella seconda forma. Nel primo caso, abbiamo cinque resti 1 e quattro resti 3, e quindi in totale $5+4 = 9$ resti; mentre nel secondo caso abbiamo quattro resti 3 e tre resti 1, e quindi in totale $4 + 3 = 7$ resti, poichè nel primo caso abbiamo tolto un solo resto asteriscato, e nel secondo caso invece tre resti asteriscati.

Quindi già si nota una leggera asimmetria tra 7 resti e 9 resti nei primi 10 valori di n e quindi fino a $N = 61 = 6 \cdot 10 + 1$, poiché ci sono nove primi nella forma $6n - 1$ e sette primi nella forma $6n + 1$ e quindi rispettivamente 9 resti (cinque resti 1 e quattro resti 3) resti (quattro resti 3 e tre resti 1), ma in totale si hanno otto resti 3 e otto resti 1 in parti uguali, e quindi i numeri dei due resti si pareggia, sebbene diversamente distribuiti nelle due forme.

In totale $2n = 2 \cdot 10 = 20$ numeri di forma $6n \pm 1$, dai quali togliere i quattro numeri composti o i quattro relativi resti asteriscati.

Lo stesso però non succede se il divisore è 3, come vedremo nella successiva tabella in base al divisore 3

Divisore 3

n	$(6n-1)/3$	resto	$(6n+1)/3$	resto
1	$5/3 = 1$	2	$7/3 = 2$	1
2	$11/3 = 3$	2	$13/3 = 4$	1
3	$17/3 = 5$	2	$19/3 = 6$	1
4	$23/3 = 7$	2	$25/3 = 8$	1*
5	$29/3 = 9$	2	$31/3 = 10$	1
6	$35/3 = 11$	2*	$37/3 = 12$	1
7	$41/3 = 13$	2	$43/3 = 14$	1
8	$47/3 = 15$	2	$49/3 = 16$	1*
9	$53/3 = 17$	2	$55/3 = 18$	1*

10	59/3 =19	2	61/3 =20	1
...

Come si vede facilmente, con il divisore 3 si hanno come risultati numeri dispari e tutti resti 1 nella prima forma, e numeri pari e resti 2 nella seconda forma. Mentre col divisore 4 si avevano cinque resti 1 e quattro resti 3 nella prima colonna, col divisore 3 tutti e nove i resti sono uguali a 2, e tutti i sette resti della seconda colonna sono uguali a 1. Nel primo caso, con divisore 4, i resti 1 e 3 erano suddivisi tra prima e seconda forma, mentre con il divisore 4 i resti 2 sono tutti nella prima forma e i resti 1 tutti nella seconda forma.

Questi risultati e novità da noi trovate usando le forme $6n \pm 1$ hanno in qualche modo qualche relazione con le “preferenze” dei numeri primi, che poi però cambiano ciclicamente in modo irregolare ma ad ogni modo “ondulatorio”, come del resto anche altre funzioni sui numeri primi; per esempio $Li(x)$ e $\pi(x)$ si sorpassano infinite volte durante la loro corsa verso l’infinito numerico; e forse anche la stessa cosa succede per il numero di coppie di Goldbach per N pari e per il numero delle coppie di numeri primi

gemelli fino a N. Vediamo ora cosa succede con il divisore 6, e quindi

con una relazione più diretta con le forme $6n \pm 1$

Divisore 6

n	$6n-1)/6$	resto	$(6n+1)/6$	resto
1	0	5	1	1
2	1	5	2	1
3	2	5	3	1
...

ora i resti sono tutti 5 nella prima forma e tutti 1 nella seconda forma; ma il resto 5 si può scrivere anche come -1, e quindi avremo resti -1 nella prima forma e +1 nella seconda; cosicchè, si ritorna alle suddette forme generali dei numeri primi $6n \pm 1$; e, dato un numero primo qualsiasi maggiore di 3, si ottiene $(p \pm 1)/6 =$ intero, e quindi con resto 0:

$$(5+1)/6 = 1$$

$$(7-1)/6 = 1$$

$$(11+1)/6 = 2$$

$$(13-1)/6 = 2$$

... ..

$$(101+1)/6 = 17$$

... ..

In teoria tutti i numeri primi dovrebbero essere equamente divisi:

metà di forma $6n-1$ e l'altra metà di forma $6n+1$, con pochissime unità di discrepanza tra i due valori; in effetti fino a $p = 103$ ci sono 13 numeri primi di forma $6n - 1$ e 12 numeri primi di forma $6n+1$, mentre fino a $p = 499 = 6 \cdot 83 + 1$ ce ne sono 46 di forma $6n - 1$ e 44 di forma $6n + 1$, quindi con una discrepanza di sole 2 unità. In futuro, con ricerche più approfondite al computer si può controllare tale discrepanza fino a $N=1\ 000, 10\ 000, \dots 10^m$, e i risultati poi potrebbero essere messi in qualche modo in relazione col filtro di Chebyshev. Questa presunta parità di primi nelle due forme $6n - 1$ e $6n + 1$ ci è utile per dimostrare per assurdo l'infinità dei numeri primi gemelli, che condividono lo stesso n ma non il segno $+$ o $-$ e quindi sono su colonne diverse, sebbene sulla medesima riga. Infatti, se essi fossero finiti, ci sarebbe un'ultima coppia di gemelli; e, in tal caso, nelle due colonne, da quel punto in poi (ultimo n che dia origine all'ultima coppia di gemelli) si dovrebbe verificarsi una delle seguenti possibilità:

a) tutti i numeri primi successivi dovrebbero essere di forma $6n - 1$, e tutti i composti di forma $6n + 1$, o viceversa, affinché per lo stesso n

non ci siano due numeri primi (e quindi gemelli) sulla stessa riga, la sola che permette una differenza $q - p = 2 = 6n+1 - (6n-1) = 1 + 1 = 2$; infatti, se poniamo $p = \text{primi}$ e $c = \text{composti}$, avremo:

$6n-1$	$6n+1$
p	c
p	c
p	c
p	c
p	c
...	...

non ci sarà mai una coppia p e p , e quindi gemelli;

b) i primi e i composti dovrebbero essere perfettamente alternati, in modo che anche così non si formino coppie p e p :

$6n-1$	$6n+1$
p	c
c	p
p	c
c	p
p	c
...	...

Poiché nella distribuzione irregolare dei numeri primi in entrambe le colonne non si verifica mai una delle due condizioni a) e b) che invece esprimono la massima regolarità, esse non

si verificano mai in realtà, consentendo così sempre, al crescere di n , la formazione di nuove coppie di gemelli, che quindi sono infiniti.

Le condizioni a) e b) sono proibite dalle forme $6n \pm 1$ dalla loro infinita irregolarità nella distribuzione dei numeri primi, e quindi anche delle coppie di numeri primi gemelli (la loro frequenza è $1/(\ln N)^2$, mentre per i numeri primi "single" la frequenza è, com'è noto, $1/\ln N$; per i numeri $N = 10^m$, la frequenza dei numeri primi è mediamente $1/2m$, mentre per i numeri primi gemelli è $1/(2m)^2 = 1/4m^2$, ma ci sono altre formule da queste derivate ma più precise, oltre a formule con integrali un po' più precise.

Oltre che a $\text{Li}(x)$ e a $\pi(x)$, il filtro di Chebyshev potrebbe essere collegato anche alla congettura di Polignac (estensione della congettura dei numeri primi gemelli) secondo la quale qualsiasi numero pari $d > 2$ è infinite volte la differenza tra due numeri primi consecutivi: in una dimostrazione in corso di perfezionamento, tale differenza varierebbe ciclicamente tra 2 e circa $8n$ fino a numeri di tipo $N = 10^n$, creando intervalli

più o meno densi di numeri primi e quindi anche di coppie di gemelli (si vedano i tre articoli sulle Progressioni Aritmetiche di numeri Primi, le cosiddette PAP).

L'irregolarità nella distribuzione dei numeri primi, anche nelle due forme $6n - 1$ e $6n + 1$, e nella successione di differenze d tra due numeri primi consecutivi da 2 (caso dei numeri gemelli) a circa $8n$, in modo quasi ciclico, rende impossibile la soluzione negativa della congettura dei numeri gemelli, che quindi sono infiniti; e quindi anche “una formula dei numeri primi” che permetta di calcolare il j -esimo numero primo p_j , nota come funzione p_j , se non in modo molto limitato, come già sapeva

Legendre nel 1896:

“...Legendre dimostrò che non esisteva nessuna funzione algebrica razionale che desse sempre numeri primi”

(Da “La storia della matematica” di Carl B. Boyer, CDE SpA Milano, pag.565.)

“Legendre osservò che $n^2 + n + 17$ è primo per tutti i valori di n da 1 a 16, e che $2n + 29$ è un numero primo per valori di n da 1 a 28”

Precedentemente Eulero aveva mostrato che $n^2 - n + 41$ è un

numero primo per valori di n da 1 a 40. (Vedi i nostri sopra accennati tre articoli sulle Progressioni Aritmetiche di numeri Primi su questo stesso sito).

Conclusione: le forme generali dei numeri primi $6k+1$ (sempre esclusi il 2 e il 3) potrebbero dirci qualcosa in più sul filtro di Chebyshev, oltre che sui numeri gemelli e relativa congettura, e sull'andamento ciclico (comune ai resti del suddetto filtro per qualche divisore particolare) anche delle coppie di Goldbach e dei numeri gemelli, grazie anche alle possibili conseguenze della congettura di Polignac su $d > 2$ come differenza tra due primi consecutivi (gemelli solo se $d = 2$, il più piccolo numero pari come possibile differenza tra due numeri dispari consecutivi e quindi possibilmente anche entrambi primi).

GRUPPO ERATOSTENE

Caltanissetta 1.6.2010 (Rettifica dell' articolo precedente)