Cristiano Teodoro
teodorocristiano@tiscali.it

Calcolo di π
con il numero desiderato di cifre decimali

Sommario: ne*lla storia della matematica il calcolo di π ha sempre affascinato l'uomo spingendolo nella ricerca di un sempre maggior numero di decimali esatti di questo numero trascendente [1]. E' sufficiente andare su Internet (vedi ad esempio[2]) per accorgersi dell'interesse che tale importante numero suscita. In diversi siti viene dato il valore numerico di π con un numero anche molto grande di cifre decimali, senza tuttavia spiegare come si sono trovate; in altri sono date varie formule, ciascuna costituita da un numero infinito di termini riguardanti il valore teorico di π. Non è facile però trovare una trattazione esauriente relativa ad un algoritmo efficiente per il calcolo di questo numero con tutti gli esatti decimali desiderati, corredato da una esposizione delle problematiche che nascono per realizzarlo.*
Per saperne di più sulla storia e sugli aspetti teorici di questo importane numero si rimanda ai riferimenti.
Questo articolo è invece dedicato a illustrare per questo numero un algoritmo per il calcolo esatto di tutte le cifre decimali desiderate, con l'esposizione delle diverse problematiche che s'incontrano .
E' importante sottolineare che nel programma dedicato alla realizzazione dell'algoritmo, è stato di fondamentale importanza l'uso nell'impostazione dei calcoli di una aritmetica a precisione multipla con Base 10^G (con G = 7 nel nostro caso) , col vantaggio essenziale, oltre quello di ottenere risultati sempre esatti, di accelerane l'esecuzione, sfruttando naturalmente per i calcoli aritmetici elementari l'aritmetica a doppia precisione disponibile nel software del linguaggio evoluto adoperato. In questa versione dell'articolo per brevità di esposizione non si riporta il listato del programma realizzato.

Abstract: *In the history of mathematics the* **π** *computation has at all times interested the Man (humankind) and has incited him towards the pursuit in the search of larger decimal places of this transcendental number[1] . That's enough to go into the web Internet (for ex,[2]) and we notice the important of this important number. In several websites the* **π** *value is displayed with a big decimal places set, but without to explain how this set has been found; in the others are showed several formulas concerning the theoretical* **π** *value. But it is hard to find an exhaustive processing pertinent to an efficient algorithm for its computation with the wanted decimal places and a description of the problems related to its implementation.*
For history and about theoretical subjects of this number we refer to the end of this paper.
Instead in this paper we explain for an algorithm concerning the exact computation of the all wanted decimal places (even several tens or some hundreds and even thousands places) and we expound the problems arising for its achievement. We underline that in the program for the fulfilment of algorithms is absolutely necessary the employment of a Radix 10^G multiple-precision arithmetic (G = 7).
We obtain in this way ever-precise results and the we also quicken their performance, using naturally the double - precision arithmetic, available with Qbasic language.
In this paper version we not enclose the program list in Qbasic language,

Calcolo di π

Sono note molte formule che danno il valore di **π** [4] sotto forma di serie, cioè come somma algebrica di un numero infinito di termini di valore sempre più piccolo, ciascun termine essendo espresso da un numero razionale del tipo $\frac{A}{B}$ con A e B numeri interi.

Una serie adatta al nostro scopo deve presentare un rapido grado di convergenza, il che significa che con il minor numero di termini della serie si deve trovare il valore di **π** con il numero di cifre decimali esatte richieste. Vi sono numerose formule (vedi sempre [4]) con le quali si può calcolare **π** tramite le funzioni arctan. Una delle più efficienti formule è quella nota come serie di Machin. Tale serie scoperta appunto da Machin nel lontano1706 è la seguente [5]:

$$\frac{\pi}{4} = 4 \cdot \arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right) \qquad (1)$$

usata da diversi matematici prima dell'avvento dei calcolatori per il calcolo delle cifre di $\boldsymbol{\pi}$.
Questa serie è stata anche utilizzata con successo con l'ausilio del calcolatore soprattutto nei primi anni dell'era computerizzata (vedi ad esempio il suo impiego sull'ENIAC nel 1949 [6] ; sul NORC nel 1955 [7] ; sull' IBM 704 [8]), perché si presenta di relativa facile programmazione.
Anche qui useremo questa serie come base per la realizzazione di un programma di calcolo adatto al nostro scopo. Se si sviluppa la (1) si ha:

$$\pi = \frac{16}{5} - \frac{16}{3\cdot 5^3} + \frac{16}{5\cdot 5^5} - \frac{16}{7\cdot 5^7} + \frac{16}{9\cdot 5^9} - \frac{16}{11\cdot 5^{11}} + \ldots\ldots\ldots + \frac{16}{(h-1)\cdot 5^{h-1}} - \frac{16}{h\cdot 5^h} + \ldots\ldots\ldots$$

$$-\frac{4}{239} + \frac{4}{3\cdot 239^3} - \frac{4}{5\cdot 239^5} + \frac{4}{7\cdot 239^7} + \ldots\ldots\ldots\ldots - \frac{4}{(h-1)\cdot 239^{h-1}} + \frac{4}{h\cdot 239^h} - \ldots\ldots\ldots$$

con $h \to \infty$, che si può scrivere in forma compatta come segue:

$$\pi = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{16}{(2\cdot k+1)\cdot 5^{2\cdot k+1}} - \frac{4}{(2\cdot k+1)\cdot 239^{2\cdot k+1}} \right) \qquad (2)$$

Manipolando un po' la formula la si può porre sotto la forma seguente:

$$\pi = \left(\frac{16}{5} - \frac{4}{239} \right) + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{\dfrac{(\frac{16}{5})}{(5^2)^k} - \dfrac{(\frac{4}{239})}{(239^2)^k}}{2\cdot k+1} \qquad (3)$$

Naturalmente in un calcolo effettivo i termini della serie devono essere considerati in numero finito, dipendente questo numero da quante cifre decimali esatte di $\boldsymbol{\pi}$ si vogliono ottenere. Nella formula occorre sostituire quindi il segno di infinito con un numero ben definito, di valore FS il meno elevato possibile compatibilmente con tutte le cifre che si vogliono ottenere. Pertanto utilizzando sempre la formula (3) si ha:

$$\pi = \left(\frac{16}{5} - \frac{4}{239} \right) + \sum_{k=1}^{FS} (-1)^k \cdot \frac{\dfrac{(\frac{16}{5})}{(5^2)^k} - \dfrac{(\frac{4}{239})}{(239^2)^k}}{2\cdot k+1} \qquad (4)$$

formula che si presta abbastanza facilmente per la realizzazione di un algoritmo di tipo iterativo da sviluppare e trattare con operazioni aritmetiche non in Base 10 ma in una base più elevata 10^G con l'esponente G >1 da scegliersi opportunamente tra i valori 5, 6 ,7 per accelerane l'esecuzione. Dalla formula indicata si può osservare che vengono implicate tutte e quante le quattro operazioni aritmetiche *elementari,* operazioni queste che verranno effettuate con l'ausilio dell'aritmetica a doppia precisione disponibile. Nei riguardi dell'operazione di divisione si vuole precisare che per essa non si presentano in questo caso particolari difficoltà di programmazione purché si mantengano adeguatamente piccoli tutti i valori numerici dei vari divisori. E ciò lo si può avere sino ad un valore di FS non superiore a $\frac{10^G - 1}{2}$.
Per rispettare l'obiettivo di calcolare tutte la cifre esatte richieste e nel tempo più breve possibile si dovrà realizzare un programma che persegua i seguenti obiettivi:

1) individuare il minimo numero FS di termini della serie in grado di determinare il valore di $\boldsymbol{\pi}$ con tutte e sole le cifre decimali esatte richieste. Si può in effetti dimostrare(vedi *NOTA*) che è sufficiente un numero di termini, riguardanti sostanzialmente la prima sommatoria della (2), pari a:

$$FS = \left\lceil \frac{N + \log 16 - \log 5}{2 \cdot \log 5} \right\rceil \qquad (5)$$

dove N è il numero dei decimali esatti di π che si desiderano ottenere.

Un esempio chiarirà meglio il concetto. Per avere il valore di π con N = 100 cifre decimali esatte è ridondante considerare 1000 od anche100 termini della serie. Risulterà invece sufficiente un numero di termini pari a $FS = \left\lceil \frac{100 + \log 16 - \log 5}{2 \cdot \log 5} \right\rceil = 72$

2) Dimensionare in modo adeguato i vettori [1] contenenti i valori numerici. A tal fine valgono le seguenti osservazioni: nello sviluppo dei calcoli si eseguono delle divisioni, e generalmente si avrà come risultato un quoziente ed un resto. Per tenere conto del solo quoziente nei calcoli successivi, non considerando pertanto il resto, è necessario che esso risulti trascurabile ai fini della precisione richiesta, cioè del numero di cifre esatte che si vogliono avere nei calcoli. Se ad esempio si vuole calcolare π con 100 cifre esatte ogni resto dovrà essere inferiore per lo meno a 10^{-100}. Per ottenere questa condizione si dovranno pertanto dimensionare i vettori contenenti i valori numerici in modo adeguato.

Così se si lavorasse in aritmetica tradizionale, cioè in Base 10 ogni vettore dovrebbe essere composto da un numero di celle superiore a 100, almeno pari a (100 + x) celle dove x è un numero di celle di margine per far si che nell'evolversi dei calcoli il valori dei vari resti che si possono anche accumulare non superino mai il valore di 10^{-100}.

NOTA - al riguardo si possono fare le seguenti considerazioni: nella formula (2) di π compare la sommatoria col termine generico in valore assoluto sempre più piccolo man mano che il valore dell'indice k aumenta. Assumendo la somma di un certo numero di termini della (2) come valore approssimato di π, l'errore che si commette è minore in valore assoluto del primo termine della sommatoria che si trascura. Basterà allora vedere quale termine della sommatoria è in valore assoluto minore del numero fissato della voluta approssimazione. Se si vuole pertanto ottenere il valore di π esatto sino alla N-esima cifra decimale, il che significa che l'approssimazione di π deve essere tale da dare luogo ad un errore minore di $\frac{1}{10^N}$, occorre imporre che il termine generico della (3) sia in valore assoluto non superiore a $\frac{1}{10^N}$. Quindi deve aversi $\frac{16}{(2 \cdot k+1) \cdot 5^{2 \cdot k+1}} - \frac{4}{(2 \cdot k+1) \cdot 239^{2 \cdot k+1}} \le \frac{1}{10^N}$ Trascurando nel primo membro della (5) il 2° termine in quanto a parità di k è sempre inferiore all'altro termine), a maggior ragione si avrà: $\frac{16}{(2 \cdot k+1) \cdot 5^{2 \cdot k+1}} \le \frac{1}{10^N}$ e quindi $\frac{(2 \cdot k+1) \cdot 5^{2 \cdot k+1}}{16} \ge 10^N$.

Chiamato FS il valore più **piccolo** per *k* che assicura l' ottenimento del valore di π con la precisione richiesta, per questo valore si ha $\frac{(2 \cdot FS+1) \cdot 5^{2 \cdot FS+1}}{16} = 10^N$ da cui si ricava log $(2 \cdot FS + 1) + (2 \cdot FS + 1) \cdot \log 5 - \log 16 = N$ (dove log è il logaritmo in base 10). Se si trascura log $(2 \cdot FS + 1)$ a vantaggio di un maggior margine per la precisione ottenibile del valore di π ed anche per un più facile calcolo del valore di *FS* si ha alla fine la seguente espressione: $FS = \frac{N + \log 16 - \log 5}{2 \cdot \log 5}$; dovendo poi essere l'effettivo valore di *FS* un intero non inferiore al valore minimo per k si ha: $FS = \left\lceil \frac{N + \log 16 - \log 5}{2 \cdot \log 5} \right\rceil = \left\lfloor \frac{N + \log 16 - \log 5}{2 \cdot \log 5} \right\rfloor + 1$

---

(1) quando si devono trattare e manipolare numeri costituiti da molte cifre, come già detto in altre occasioni, risulta necessario memorizzare i numeri in vettori disponendo opportunamente nei suoi elementi (celle) le cifre del numero ed effettuare su di esse le opportune operazioni aritmetiche, facendo presente che in ogni cella sono disposte G cifre elementari

Utilizzando invece l' aritmetica con Base 10^G ogni vettore dovrà essere composto da un numero di celle o elementi non inferiore a $\frac{100}{G} + x$. Un valore di x = 2 risulta di sufficiente margine.Per avere ad esempio π con 100 cifre esatte utilizzando l'aritmetica in base 10^G con G =5 ogni vettore [1] (array) impiegato nei calcoli dovrà essere dimensionato con un numero di celle non inferiore a (25 + x) con un opportuno $x \geq 2$.

3) quando si eseguono le operazioni di divisione operare in modo di disporre di un divisore il più piccolo possibile e che in ogni caso sia sempre inferiore al valore della Base 10^G scelta . Nel presente caso si vede osservando la (4) che man mano che cresce il valore dell'indice k aumenta il valore dei divisori, cioè dei denominatori, nei termini della sommatoria. Ad esempio per il termine $\frac{\frac{16}{5}}{(5^2)^k}$ con k = 50, il divisore $\left(5^2\right)^{50}$ sarebbe composto da 70 cifre; se si volesse eseguire direttamente il suo calcolo si andrebbe incontro oltre a difficoltà di programmazione anche a tempi lunghi di calcolo.

Per ovviare a questa grossa difficoltà si può procedere nella seguente maniera:

supponiamo di avere calcolato il quoziente del termine $\frac{\frac{16}{5}}{(5^2)^{k-1}} = \frac{\frac{16}{5}}{5^{2\cdot k} \cdot 5^{-2}}$; per calcolare il quoziente del termine successivo, cioè di $\frac{\frac{16}{5}}{(5^2)^k}$, basterà dividere il quoziente già trovato per 5^2 .

Partendo perciò dal primo termine una volta calcolato il suo quoziente per calcolare i quozienti dei successivi sarà sufficiente dividere ogni volta per il valore $5^2 = 25$, ovviando così al problema di effettuare divisioni con divisori anche molto grandi. Procedendo in modo analogo per l'altro termine $\frac{\frac{4}{239}}{(239^2)^k}$ il divisore di ogni termine successivo a quello già calcolato avrà il valore di $239^2 = 57121$. L'altra divisione, quella per $2k+1$ non comporta nessuna difficoltà in quanto tale tipo di divisore anche per valori alti di k si mantiene sufficientemente piccolo (per un numero di cifre esatte da trovare pari anche a 50000 il valore di $2FS+1$ non supererebbe il valore di 72000). Tenendo conto delle varie condizioni sopra indicate si è realizzato in un linguaggio evoluto (nel presente caso il linguaggio utilizzato è stato il Qbasic) un programma, con il quale si è in grado di calcolare per un valore qualsiasi sino ad un massimo di 50000 (cinquantamila), tutte le cifre esatte desiderate di π. Il valore limite di 50000 è dovuto sia alle limitazioni del software in Qbasic utilizzato che permette di dimensionare i vettori sino ad un valore massimo di celle per vettore non superiore a 8000, sia al tempo impiegato di calcolo che per già per un valore di 50000 risulta di circa 27 minuti.

Riguardo all'argomento trattato in questo articolo, viene messo a disposizione del lettore, un **Eseguibile** corredato da opportune informazioni, reperibili entrambi sempre su questo sito.

RIFERIMENTI

[3] R.Courant e H.Robbins: *Che cos'è la matematica , Cap. VI, § 2.* – Biblioteca di cultura scientifica , serie azzurra – Paolo Boringhieri Editore 1964. Torino

[1] P.J. Davis , *Il mondo dei grandi numeri* - Zanichelli - Collana MM 1 Edizione 1984, Torino

[2] http://it.wikipedia.org/wiki/Pi_Greco

[4] http://numbers.computation.free.fr/Constants/Pi/piCompute.html

[5] E. Kasner e J. Newman: *Matematica e immaginazione – Cap. III –* Bompiani Editore 1948

[6] G.Reitwiesner – An ENIAC determination of π and e to more than 2000 decimal places –MTAC, vol.4,1950

[7] S.C. Nicholson & J.Jeenel: Some comments on NORC computation of π- MATC, vol.9 1955

[8] F. Genuys, Dix mille decimales de π ; *Chiffres*, v. 1, 1958