

BREVE NOTA SUI PRIMI GEMELLI

Con il nome di numeri primi gemelli si indicano due numeri primi p_1 e p_2 con $p_2 > p_1$ tali per cui $p_2 - p_1 = 2$. Questa differenza prende il nome di “gap” in inglese.

Qui si vogliono mostrare dei Primi Gemelli di varie dimensioni generati e verificati tramite un apposito Programma in Qbasic (il cui listato non viene riportato per non appesantire questa breve nota.) realizzante per la verifica o la generazione di numeri primi, anche formati da diverse decine di cifre, l’algoritmo di Rabin - Miller⁽¹⁾ [1] che, come è noto, è un algoritmo probabilistico con cui si può verificare con una probabilità alta a piacere se un numero è primo o composto e con l’ausilio del quale si possono anche generare numeri primi.

Ogni numero primo relativo ad ogni coppia di Primi Gemelli mostrata negli elenchi è stato trovato rispettando la seguente condizione:

la probabilità che il numero non sia primo deve essere inferiore a 0.000000000001, il che equivale anche dire che la probabilità che esso sia primo è superiore a 0.999999999999.

Non si ha in effetti la certezza matematica che i numeri primi trovati siano effettivamente tali. Tuttavia per stabilire se un numero è primo o per generare un numero primo grande, costituito anche da varie decine o addirittura da centinaia di cifre, vengono utilizzati normalmente (vedi ad esempio il campo della crittografia, in particolare l’algoritmo crittografico RSA per il quale sono necessari due numeri primi ciascuno di circa 155 cifre), i metodi di tipo probabilistico, con i quali la primalità di un numero viene verificata con una probabilità così prossima al valore 1, e cioè alla certezza, da considerare in pratica primo il numero in esame..

Si vuole fare presente che l’insieme dei primi gemelli è meno denso di quello dei numeri primi generici. Questo è messo in evidenza nella Tabella riportata più sotto.

Dalla sua osservazione si nota che più è esteso l’insieme degli interi preso in considerazione più risulta alto il rapporto $\frac{N(p)}{N(cg)}$. Considerando ad esempio l’ultima riga della Tabella risulta esserci

in media una coppia di primi gemelli ogni 27 primi. Per particolari intervalli numerici più limitati si possono trovare però addirittura rapporti molto più elevati fra dei primi generici e l’insieme dei primi gemelli, come si può evidenziare con il seguente esempio:

da $10^{41} + 29161$ a $10^{41} + 62103$ vi sono 32943 interi interi; ebbene in tale intervallo numerico esistono 367 primi, mentre di coppie di primi gemelli ve ne sono solo 3. con un rapporto fra numeri primi e coppie di gemelli $\frac{N(367)}{N(3)} = 122.333$ Risulta perciò evidente che il tempo di calcolo per

trovare un determinato numero di coppie di primi gemelli risulterà necessariamente abbastanza più lungo rispetto a quello relativo ad uno stesso numero di primi.

Si riportano in fondo a questa nota due elenchi di numeri primi gemelli di varia grandezza che sono stati trovati e verificati utilizzando il suddetto programma, che ha dato luogo al relativo Eseguibile.

Detto Eseguibile viene riportato sul presente Sito nella sezione Software dedicata all’autore. Con esso si è in grado di calcolare e trovare coppie di Primi Gemelli di varia grandezza, a partire dai più piccoli sino ad arrivare a quelli formati da diverse decine di cifre..

Qualora qualcuno dei primi gemelli mostrati negli elenchi sotto riportati non risultasse primo [2]. si invita il lettore a segnalarlo.

(1) Per una conoscenza più dettagliata del test di primalità di Rabin–Miller si rimanda il lettore al riferimento [3].

RIFERIMENTI

- [1] M.O Rabin, "Probabilistic algorithm for testing primality,"- *J. Number Theory*, **12** (1980) pagg.128÷138.
- [2] F. Arnault, "Rabin – Miller Primality test: composite number wick pass it"- *Mathematics of Computation*, Vol.64 n. 209 (January 1995), pagg. 355 ÷ 365
- [3] C. Teodoro, "Verifica e generazione di numeri primi relativamente grandi"-*La Comunicazione* Anno 2003 Volume LII – pagg.113 ÷124

Vedi anche:

http://www.matematicamente.it/approfondimenti/matematica/creazione_e_verifica_di_numeri_primi_relativamente_grandi_200711102270/

SITI INTERNET

- <http://primes.utm.edu/glossary/page.php?sort=TwinPrime>
- <http://mathworld.wolfram.com/TwinPrimes.html>
- <http://numbers.computation.free.fr/Constants/Primes/twin.html>
- <http://primes.utm.edu/top20/page.php?id=1>
- <http://curvebank.calstatela.edu/prime/prime.htm>
- http://it.wikipedia.org/wiki/Congettura_dei_numeri_primi_gemelli
- Xavier Gourdon, Pascal Sebah: *Introduction to Twin Primes and Brun's Constant*

TABELLA

$N(i)=\text{INTERVALLO NUMERICO}$	$N(p) =\text{numero di PRIMI esistenti in } N(i)$	$N(cg) = \text{numero di Coppie di PRIMI GEMELLI esistenti in } N(i)$	$\frac{N(p)}{N(cg)}$
2 ÷ 10	4	2	2
2 ÷ 10 ²	25	8	3,125
2 ÷ 10 ³	168	35	4,8
2 ÷ 10 ⁴	1229	205	5,995...
2 ÷ 10 ⁵	9591	1224	7,835...
2 ÷ 10 ⁶	8498	8169	9,609...
2 ÷ 10 ⁷	664579	58980	11,267...
2 ÷ 10 ⁸	5761455 *	440312**	13,084...
2 ÷ 10 ⁹	50847534*	3424506**	14,848...
2 ÷ 10 ¹⁰	455052511*	27412679**	16,600...
2 ÷ 10 ¹¹	4118054813*	224376048**	18.353...
2 ÷ 10 ¹²	37607912018*	1870585220**	20,104...
2 ÷ 10 ¹³	346065536839*	15834664872**	21,854...
2 ÷ 10 ¹⁴	3204941750802*	135780321665**	23,603...
2 ÷ 10 ¹⁵	29844570422669*	1177209242304**	25,351...
2 ÷ 10 ¹⁶	279238341033925*	10304195697298**	27,099...

- I valori numerici contrassegnati da * sono stati presi dal seguente libro:
H. Riesel – *Prime Numbers and Computer Methods for Factorization*
- I valori numerici contrassegnati da **sono stati presi dal seguente Sito Web:
[Xavier Gourdon, Pascal Sebah: *Introduction to Twin Primes and Brun's Constant*](http://www.matematicamente.it/approfondimenti/matematica/creazione_e_verifica_di_numeri_primi_relativamente_grandi_200711102270/)

Elenco di alcuni PRIMI GEMELLI random

COPPIA di PRIMI GEMELLI RANDOM DI 49 CIFRE

p = 2388897643521000231026509989753165371113224070367
p + 2 = 2388897643521000231026509989753165371113224070369

COPPIA di PRIMI GEMELLI RANDOM DI 70 CIFRE

p = 8616002012659784919231135040774764644020102430570087974997001054406547
p + 2 = 8616002012659784919231135040774764644020102430570087974997001054406549

COPPIA di PRIMI GEMELLI RANDOM DI 84 CIFRE

p = 346888856700231919994788652165475316498567435532164225730130088000142553779465254211
p + 2 = 346888856700231919994788652165475316498567435532164225730130088000142553779465254213

COPPIA di PRIMI GEMELLI RANDOM DI 105 CIFRE

p = 974165674943611645728731132252405075310989753416597857522343567981132523534376784676467644665313120401939
p + 2 = 974165674943611645728731132252405075310989753416597857522343567981132523534376784676467644665313120401941

COPPIA di PRIMI GEMELLI RANDOM DI 133 CIFRE

p = 769553205134051222223104359789412748163249857135346792000213504659700564989779919454523143125974259475831
6956435723721132347391130327
p + 2 = 769553205134051222223104359789412748163249857135346792000213504659700564989779919454523143125974259475831
6956435723721132347391130329

COPPIA di PRIMI GEMELLI RANDOM DI 154 CIFRE

p = 6770100235462059789897594228534376879897644651010022219798941052720319846647923135646743715510024335728
41997152040567775461002355000013264644676874491459
p + 2 = 6770100235462059789897594228534376879897644651010022219798941052720319846647923135646743715510024335728
41997152040567775461002355000013264644676874491461