

# Block Notes Matematico

## La zeta di Keith e i numeri di Keith

ing. Rosario Turco

L'autore in questo articolo inizia ad indagare sulla *zeta di Keith*, una zeta di Fibonacci generalizzata, a m termini.

Le funzioni zeta sono, in generale, di interesse anche per gli aspetti analitici che conducono alla dimostrazione delle congetture sull'infinità di particolari classi di numeri.

In questo caso la zeta di Keith serve ad indagare sull'infinità o meno dei numeri di Keith; ma rimane comunque un argomento di non semplice indagine.

### Numeri di Keith

La rappresentazione di un numero intero naturale in base decimale avviene attraverso dei digit o cifre, da 0 a 9, che a seconda della loro posizione hanno il peso di unità, decine, centinaia, migliaia etc. In altri termini il sistema di numerazione decimale è quindi a peso posizionale.

In generale, quindi, un numero N rappresentato con  $d_0 d_1 \dots d_k \dots d_{m-1}$  è tale che:

$$N = \sum_{k=0}^{m-1} d_{m-1-k} \cdot 10^k \quad (1)$$

Ad esempio  $N=14$   $m=2$  digit allora  $d_1=4$  e  $d_0=1$ .

Assegnato un numero N, una *sequenza di Keith* si ottiene estraendo da N i suoi m digit, costruendo una sequenza del tipo:

$$d_0, d_1, \dots, d_{m-1}, F(1), F(2), \dots F(i), \dots$$

Dove:

$$F(i) = \sum_{j=1}^{i-1} F(j) + F_k(i-1) \quad (2)$$

$$F_k(i-1) = \sum_{k=i}^{m-1} d_k \quad (i=0, 1, \dots, m-1) \quad (3)$$

$$F_k(i \geq m) = 0 \quad (4)$$

$$F(i \leq 0) = 0 \quad (5)$$

Ora se:

$$\exists i : F(i) = N \quad (6)$$

allora N è un *Numero di Keith*.

Questa operazione si può ripetere per tutti i valori di N appartenente all'insieme dei numeri naturali e verificare se vi è un numero di Keith. Ad esempio alcuni numeri di Keith sono:

14, 19, 28, 47, 61, 75, 197, 742, 1104, 1537, 2208, 2580, 3684, 4788, 7385, 7647, 7909 etc.

In particolare esistono solo 71 numeri di Keith al di sotto di  $10^{19}$ , quindi sono abbastanza rari rispetto ad altri tipi di numeri.

#### **Conggettura dell'infinità dei numeri di Keith**

Si ipotizza che i numeri di Keith siano infiniti.

Eulero fu il primo a dimostrare in chiave analitica l'infinità dei numeri primi, attraverso la definizione della funzione zeta (di Eulero):

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{-s}} = \prod_p \frac{1}{1-p^{-s}} \quad (7)$$

Se  $s=a+ib=1$ , la serie di sopra è la serie armonica, ovvero:

$$1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + \dots$$

Quindi la serie armonica è la somma degli inversi di tutti numeri naturali. Tale serie è positivamente divergente e assolutamente divergente, ovvero non è limitata superiormente. Inoltre ogni n della (7) è anche scomponibile in un prodotto unico di potenze di numeri primi.

Eulero concluse che la serie armonica è uguale al prodotto di tutte le serie di potenze dei numeri primi. Infatti, ogni termine della serie armonica è uguale a uno ed uno solo tra i possibili prodotti di termini delle serie di potenze e viceversa.

Però se i numeri primi fossero stati finiti, queste serie sarebbero in numero finito e tale sarebbe anche il loro prodotto, mentre la serie armonica tende a infinito. Eulero ne concluse analiticamente che i numeri primi erano infiniti.

#### **Zeta di Keith**

La premessa precedente ci fa supporre che l'infinità dei numeri di Keith deve passare attraverso una zeta di Fibonacci generalizzata detta *zeta di Keith* (vedi [1][2]):

$$\zeta_K(s) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{F(i)^s} \quad (8)$$

dove F(i) nella (8) è dato tenendo conto di (2)(3)(4)(5)(6).

Per l'infinità è sufficiente considerare anche ovviamente  $s=1$ .

I termini F(i) ottenibili sono comunque dei numeri interi appartenenti all'insieme dei numeri naturali; però mentre la zeta della (7) prende tutti i numeri n, la zeta di Keith della (8) prende solo una parte di essi nell'insieme dei numeri naturali N, che è infinito.

Se non ci fosse l'ulteriore condizione (6), già la (8) permetterebbe di affermare l'infinità dei numeri di Keith; difatti un numero di Keith è individuato se e solo se per qualche "i" è  $F(i) = N$  cioè se:

$$F(i) = \sum_{k=0}^{m-1} d_{m-1-k} \cdot 10^k \quad (9)$$

Quindi nella (8) deve essere vera anche la (9).

Questo vuol dire che:

- i numeri di Keith sono più rari di quelli di Fibonacci con  $m=2$  e dei numeri primi stessi;
- avremo un numero di Keith se sono soddisfatte delle uguaglianze; come conseguenza se non fossero soddisfatte le uguaglianze non si avrebbe più l'infinità dei numeri di Keith.
- E' anche evidente che le uguaglianze che discendono dalla (8)(9) dipendono dai digit di N (Vedi esempio).

*Esempio*

Esaminiamo il caso semplice di Fibonacci  $m = 2$

$d_0, d_1, F(1), F(2), F(3)$

Verifichiamo in una tabella le prime quattro uguaglianze che discendono dalla (8) e dalle (2)(3)(4)(5):

<b>F(i)</b>	<b>Termini precedenti</b>	<b>Somma dipendente dai digit</b>
F(1)	$F_k(0)+F(0)$	$d_0+d_1$
F(2)	$d_1+F(1)$	$d_0+2d_1$
F(3)	$F(1)+F(2)$	$2d_0+3d_1$
F(4)	$F(2)+F(3)$	$3d_0+5d_1$
...	...	...

Ricordiamo che ogni  $d_i$  è una qualsiasi cifra tra 0 e 9 (una sola).

Usiamo la (8) con F(1):

$$d_0 + d_1 = d_1 + 10 \cdot d_0 \quad (9)$$

L'uguaglianza (9) è *impossibile* perché porta all'assurdo  $1 = 10$ .

Se, invece, usiamo la (8) con F(2):

$$d_0 + 2 \cdot d_1 = d_1 + 10 \cdot d_0 \quad (10)$$

L'uguaglianza (10) è *possibile* perché corrisponde a  $d_1 = 9d_0$  ( $d_0$  è la cifra di peso maggiore); e la soluzione è  $d_0=1$  e  $d_1=9$ , quindi con  $N=19$ .

Usiamo la (8) con F(3):

$$2 \cdot d_0 + 3 \cdot d_1 = d_1 + 10 \cdot d_0 \quad (11)$$

L'uguaglianza (11) adesso ha la soluzione:

$$\begin{cases} d_0 = 1 \\ d_1 = 4 \end{cases} \rightarrow 2 \cdot 1 + 3 \cdot 4 = 4 + 10 \cdot 1$$

## L'infinità dei numeri di Keith

L'infinità dei numeri di Keith dipende, quindi, dal fatto se le uguaglianze, dovute alle (8)(9), siano sempre possibili per qualche N oppure no.

Il lato sinistro di un'equazione che discende dalla (8), in generale, tende a crescere all'aumentare dell'indice "i" in F(i); per cui maggiore è N, maggiore è l'indice "i" a cui arrivare e maggiore è la lunghezza della sequenza di Keith che si otterrebbe con N.

La condizione per cui la (8) non permettesse di ottenere numeri di Keith dovrebbe essere però vera per qualsiasi numero naturale al di là di un certo M positivo, probabilmente grande, e per un qualche valore di m o numero di digit. In altri termini se si ipotizza che i Numeri di Keith non sono infiniti, considerando l'insieme dei numeri naturali fino ad M, allora per M + n, con n>0 qualsiasi, non si troveranno più numeri di Keith.

In particolare se m sono i digit, allora tutte le possibili permutazioni sono:

$$P = 9 \cdot 10^{m-1}$$

Questo perché ogni cifra delle m in gioco possono assumere valore da 0 a 9, tranne la prima di peso  $10^m$  che non può assumere valore 0.

Potrebbe, anche, accadere che non esistano numeri di Keith solo per determinati m, ma che in realtà sono infiniti e rari. Quest'ultima cosa è tra le più probabili.

Per cui per rispondere se la congettura è vera o meno occorre arrivare a verificare tali condizioni e la sua dimostrazione non è certo banale.

## Riferimenti

[1] La zeta di Fibonacci - Rosario Turco

[2] The Fibonacci's zeta function. Mathematical connections with some sectors of String Theory – Michele Nardelli, Rosario Turco

This document was created with Win2PDF available at <http://www.win2pdf.com>.  
The unregistered version of Win2PDF is for evaluation or non-commercial use only.