Block Notes Matematico

"Ultimo Teorema di Fermat". E se lo dimostrassimo così?

Rosario Turco

Quale può essere un modo semplice breve ed elegante per dimostrare l'Ultimo Teorema di Fermat, con metodi dell'epoca di Fermat tra il '600 e il '700?

Sappiamo che Newton e Fermat erano contemporanei.

Erano note diverse cose:

- l'interpolazione di punti con polinomi (metodo delle differenze finite di Newton)
- i coefficienti di Newton o il Triangolo di Tartaglia o di Pascal
- le equazioni diofantee
- metodi di analisi infinitesimale
- etc

Fermat non mostrò mai la soluzione finale. Si era ingannato o non volle mostrarla? Qualcuno insistette per vederla? Fermat mostrò solo una tecnica della "discesa infinita" … Eulero ed altri intrapresero strade complesse. Andrew Wiles utilizzò le funzioni ellittiche, strumenti del 20° secolo. Serviva tutto ciò? Esiste una strada diversa?

Da quando Wiles ha dimostrato il Teorema, si è scatenata una caccia ad una soluzione semplice, che coinvolge professionisti ed appassionati. Non ci siamo sottratti neanche noi, da un possibile volo pindarico, o da un esperimento concettuale…

Segue una possibile dimostrazione, troppo semplice e, forse, per questo elegante: ci siamo ingannati o è giusta? Se è sbagliata, in cosa è sbagliata?

Ma prima descriviamo alcuni concetti che sono alla base della dimostrazione.

IL COEFFICIENTE BINOMIALE

Il coefficiente binomiale è definito da

$$C(n;k) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \qquad n, k \in \mathbb{Z}; 0 \leq k \leq n$$

(dove n! è il simbolo del fattoriale di n) e può essere calcolato anche facendo ricorso al triangolo di Tartaglia.

Esso è utile nel calcolo delle Combinazioni C(n;k) e fornisce il numero delle combinazioni semplici di n elementi di classe k. Ad esempio:

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{120}{12} = 10$$

è il numero di combinazioni di 5 elementi presi 3 alla volta.

Proprietà del coefficiente binomiale

Il coefficiente binomiale ha le seguenti proprietà:

- $$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

Dimostrazione formale

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{n!} = 1$$

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{n!}{n!} = 1$$

Dimostrazione combinatoria

Le combinazioni di n elementi di lunghezza 0 o n sono evidentemente una sola: rispettivamente l'insieme vuoto o l'intero insieme di n elementi

- $$\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$$

Dimostrazione formale

$$\binom{n}{1} = \frac{n!}{1!(n-1)!} = \frac{n!}{(n-1)![n-(n-1)]!} = \binom{n}{n-1} = n$$

Dimostrazione combinatoria

Vi sono evidentemente n modi per scegliere un elemento tra n o per tralasciarne uno

- $$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Dimostrazione formale

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)![n-(n-k)]!} = \binom{n}{n-k}$$

Dimostrazione combinatoria

Le scelte di k elementi sono in corrispondenza biunivoca con i sottoinsiemi degli n-k elementi tralasciati

- $$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$$

ovvero:

- $$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

(proprietà che permette di costruire i coefficienti binomiali con il triangolo di Tartaglia)

Dimostrazione formale

$$\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k} = \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

considerando il fatto che $(n-k)! = (n-k)(n-k-1)!$, ed allo stesso modo $(k+1)! = (k+1)k!$

si ha:

$$\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k} = \frac{n!}{(k+1)k!(n-k-1)!} + \frac{n!}{(n-k)k!(n-k-1)!} =$$

$$= \frac{(n-k)n!}{(k+1)(n-k)k!(n-k-1)!} + \frac{(k+1)n!}{(k+1)(n-k)k!(n-k-1)!}$$

e quindi:

$$\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k} = \frac{(n-k+k+1)n!}{(k+1)k!(n-k)(n-k-1)!}$$

$$\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} = \binom{n+1}{k+1}$$

ovvero la tesi.

Dimostrazione combinatoria

Per calcolare il numero di combinazioni semplici di n+1 elementi di lunghezza k+1, scegliamo uno degli n+1 elementi, che chiameremo X, e dividiamo le combinazioni in due classi: quelle che non contengono

X e quelle che lo contengono. Le cardinalità delle due classi sono evidentemente date dai due termini del secondo membro della formula che volevamo dimostrare.

- $$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + ... + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$$

Dimostrazione formale

Partendo dal Teorema binomiale abbiamo:

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{(n-k)} 1^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

ovvero la tesi.

Dimostrazione combinatoria

2^n è il numero dei sottoinsiemi di un insieme di n elementi. Possiamo dividere tali sottoinsiemi in classi, ponendo in ogni classe quelli di una data cardinalità. Poiché i sottoinsiemi di cardinalità k sono proprio

$$\binom{n}{k},$$

si ottiene subito la tesi.

TEOREMA BINOMIALE

Il teorema binomiale (o anche formula di Newton, binomio di Newton e sviluppo binomiale) esprime lo sviluppo della potenza n-ma di un binomio qualsiasi con la formula seguente:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

in cui il fattore:

$$\binom{n}{k}$$

rappresenta il coefficiente binomiale ed è sostituibile con:

$$\left(\frac{n!}{k!(n-k)!}\right).$$

La formula vale per ogni coppia di numeri reali o complessi, ma più in generale vale in ogni anello commutativo.

Come esempio di applicazione della formula, riportiamo i casi piccoli, n = 2, n = 3 ed n = 4:

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

$$(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4.$$

Dimostrazione

Il teorema binomiale può essere dimostrato per induzione. Infatti è possibile introdurre per tale teorema un passo base per cui esso risulta banalmente vero

$$(a+b)^1 = \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} a^{(1-k)} b^k = a + b$$

e provare con il passo induttivo la veridicità del teorema per un esponente n qualsiasi. Infatti presa per corretta l'espressione:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{(n-k)} b^k$$

sicuramente vera per n+1, si ha

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n$$

$$= (a+b) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1}$$

da cui, essendo:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k = \binom{n}{0} a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k$$

$$= \binom{n}{0} a^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k+1} a^{n+1-(k+1)} b^{k+1}$$

$$= \binom{n}{0} a^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k+1} a^{n-k} b^{k+1}$$

ed

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} + \binom{n}{n} b^{n+1}$$

si ha che, utilizzando nel primo passaggio una nota proprietà del coefficiente binomiale:

$$(a+b)^{n+1} = \binom{n}{0} a^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} \right) a^{n-k} b^{k+1} + \binom{n}{n} b^{n+1}$$

$$= \binom{n}{0} a^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k+1} a^{n-k} b^{k+1} + \binom{n}{n} b^{n+1}$$

$$= \binom{n}{0} a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^{k} + \binom{n}{n} b^{n+1}$$

essendo infine:

$$\binom{n}{0} = \binom{n+1}{0} = 1 \qquad \binom{n}{n} = \binom{n+1}{n+1} = 1$$

si ha che:

$$\binom{n}{0} a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^{k} + \binom{n}{n} b^{n+1} = \binom{n+1}{0} a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^{k} + \binom{n+1}{n+1} b^{n+1}$$

e si ottiene l'espressione formale dello sviluppo della potenza successiva del binomio

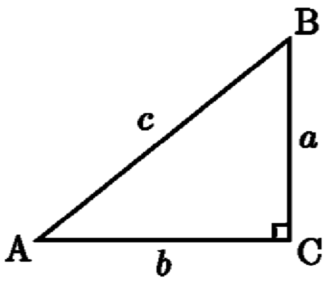
$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{(n+1)-k} b^{k}$$

che conferma la tesi.

TEOREMA DI PITAGORA

Enunciato

In ogni triangolo rettangolo, l'area del quadrato costruito sull'ipotenusa è equivalente alla somma delle aree dei quadrati costruiti sui cateti.



Dato un triangolo rettangolo di lati a, b e c, ed indicando con c la sua ipotenusa e con a e b i suoi cateti, il teorema è espresso dall'equazione:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

o, in alternativa, risolvendolo per c:

$$\sqrt{a^2 + b^2} = c.$$

Da cui si ricavano i rispettivi cateti:

$$\sqrt{c^2 - b^2} = a.$$

e

$$\sqrt{c^2 - a^2} = b.$$

Se la terna a,b,c è costituita da numeri interi essa si chiama terna pitagorica.

Inversamente, ogni triangolo in cui i tre lati verificano questa proprietà è rettangolo: questo teorema, con la sua dimostrazione, appare negli Elementi di Euclide immediatamente dopo il teorema di Pitagora stesso.

Dimostrazione con la trigonometria

Il teorema dei seni mette in relazione le lunghezze dei lati di un triangolo e i seni degli angoli opposti. Anche questa relazione si applica a qualsiasi triangolo e, nel caso in cui questo sia rettangolo, può essere ritenuta equivalente al teorema di Pitagora (benché in modo meno immediato rispetto al teorema del coseno).

Il teorema dei seni asserisce che in un triangolo qualsiasi, con le notazioni come in figura, valgono le relazioni seguenti:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R.$$

Elevando al quadrato:

$$c^2 = a^2\frac{\sin^2\gamma}{\sin^2\alpha}, \quad b^2 = a^2\frac{\sin^2\beta}{\sin^2\alpha}.$$

Sommando i termini si ottiene:

$$c^2 + b^2 = a^2\frac{\sin^2\gamma + \sin^2\beta}{\sin^2\alpha}.$$

Quando α è un angolo retto, si ottiene $\beta = \pi / 2 - \gamma$ e quindi:

$$\frac{\sin^2\gamma + \sin^2\beta}{\sin^2\alpha} = \sin^2(\pi/2 - \beta) + \sin^2\beta = \cos^2\beta + \sin^2\beta = 1.$$

Si ottiene quindi in questo caso il teorema di Pitagora:

$$c^2 + b^2 = a^2.$$

Dimostrazione Ultimo Teorema di Fermat

Segue una nostra dimostrazione per n pari e dispari, completa.

Dimostrazione:

Dal Teorema di Pitagora è:

$$x^2 + y^2 = c^2 \qquad (1)$$

$$\left(x^2 + y^2\right)^m = \left(c^2\right)^m \qquad (2)$$

Dallo sviluppo di Newton della (2) è:

$$\sum_{h=0}^{m}\binom{m}{h}\left(x^2\right)^{m-h}\left(y^2\right)^h = \left(c^2\right)^m$$

$$\binom{m}{0}\left(x^2\right)^m\left(y^2\right)^0 + \binom{m}{n}\left(x^2\right)^0\left(y^2\right)^m + \sum_{h=1}^{m-1}\binom{m}{h}\left(x^2\right)^{m-1-h}\left(y^2\right)^h = \left(c^2\right)^m$$

$$x^{2m} + y^{2m} + \sum_{h=1}^{m-1}\binom{m}{h}\left(x^2\right)^{m-1-h}\left(y^2\right)^h = \left(c^2\right)^m \qquad (3)$$

dove $$\binom{m}{0} = \binom{m}{m} = 1 .$$

Se $n = 2 \cdot m$, quindi n pari, la (3) diventa:

$$x^n + y^n + \sum_{h=1}^{m-1} \binom{m}{h} \left(x^2\right)^{m-1-h} \left(y^2\right)^h = c^n \ .$$

Poiché $$\sum_{h=1}^{m-1} \binom{m}{h} \left(x^2\right)^{m-1-h} \left(y^2\right)^h > 0$$

allora è:

$$x^n + y^n < c^n \ .$$

Se n è dispari, allora per la proprietà delle radici quadrate secondo cui $\sqrt{n} + \sqrt{m} \geq \sqrt{n+m}$, abbiamo:

$$x^n + y^n = \left(x^{2n}\right)^{1/2} + \left(y^{2n}\right)^{1/2} \geq \left(x^{2n} + y^{2n}\right)^{1/2} > c^n$$

per cui per n > 2 è sempre

$$x^n + y^n \neq c^n \ .$$

Inoltre è:

$$\frac{x^n}{c^n} + \frac{y^n}{c^n} = 1$$

Da cui è:

$$a^n + b^n = 1 \qquad (4)$$

dove $a = \dfrac{x}{c}$ $\quad \mathrm{b} = \dfrac{\mathrm{y}}{\mathrm{c}}$

Ma la (4) è una curva ellittica con soluzioni razionali e non intere.