

Funzione totiente ed RH

Gruppo Eratostene

ααωωω

Abstract

In this paper the Authors will show some links between arithmetic functions and zeta of Riemann.

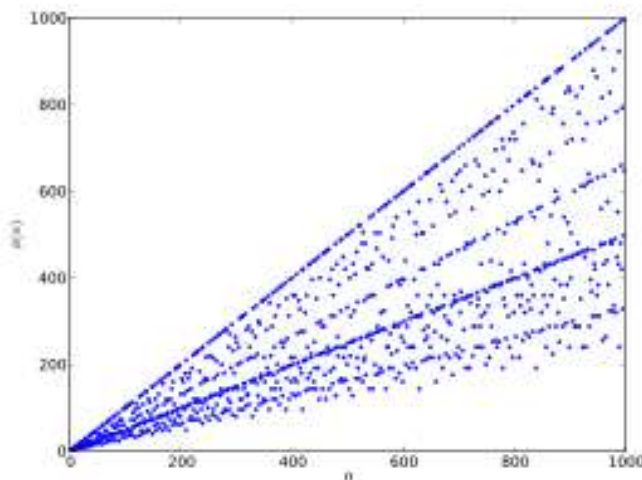
Riassunto

In questo lavoro gli autori partendo dalla definizione delle funzioni aritmetiche si concentrano sui legami di esse tra loro e la zeta di Riemann.

La funzione totiente

Definizione

La **funzione $\varphi(n)$ di Eulero**, detta anche **funzione totiente** o semplicemente **funzione di Eulero o totiente**, è definita, per ogni intero positivo n , come il numero degli interi > 0 e $< n$, coprimi con n . Ad esempio, $\varphi(8) = 4$ poiché i numeri coprimi di 8 sono: 1,3,5,7..



primi 1000 valori di $\varphi(n)$

$\varphi(n)$ è una funzione molto importante nella teoria dei numeri, principalmente perché è la cardinalità del gruppo moltiplicativo di interi di modulo n , più precisamente l'ordine del gruppo dell'anello $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ (vedere aritmetica modulare). Questo fatto, unito con il teorema di Lagrange, dimostra il teorema di Eulero: se a è un numero coprimo con n , allora

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$$

La funzione totiente è legata a molte altre funzioni: Moebius, zeta di Riemann (vedi [1]), come vedremo nel seguito

Funzione Möbius, da Wikipedia :

Funzione di Möbius

Da Wikipedia, l'enciclopedia libera.

La **funzione di Möbius** è una funzione $\mu(n)$ utilizzata in [teoria dei numeri](#) che classifica i numeri

interi positivi in una di tre categorie possibili secondo la [scomposizione in fattori](#) e che entra in un'importante formula di inversione. ...**Indice**

[\[nascondi\]](#)

[1 Definizione classica](#)

○ [1.1 Rapporto con la formula di inversione](#)

[2 La funzione di Mertens](#)

[3 Generalizzazione di Gian-Carlo Rota](#)

[4 Voci correlate](#)

[5 Bibliografia](#)

[6 Collegamenti esterni](#)

Definizione classica [\[modifica\]](#)

La funzione viene definita assegnando a $\mu(n)$ i seguenti valori:

- -1 se n è scomponibile in un numero dispari di fattori primi distinti. Per esempio $\mu(435) = -1$ perché $435 = 3 \times 5 \times 29$, ha tre fattori primi. Per gli scopi di questa funzione, un numero primo è considerato avere un fattore primo, in sé, quindi $\mu(p) = -1$.
- 0 se ha uno o più fattori primi ripetuti. Per esempio $\mu(436) = 0$ perché $436 = 2^2 \times 109 = 2 \times 2 \times 109$, poiché gli esponenti significano che un fattore accade due volte o più nella scomposizione in fattori.
- +1 se è scomponibile in un numero pari dei fattori primi distinti. Per esempio $\mu(437) = 1$ perché $437 = 19 \times 23$. Si assume anche che $\mu(1) = 1$, considerando che abbia una scomposizione in 0 fattori primi.

Chiaramente essa è una [funzione aritmetica moltiplicativa](#), cioè tale che

se h e k sono interi positivi coprimi, allora $\mu(h \cdot k) = \mu(h) \cdot \mu(k)$.

La funzione è stata introdotta da [August Ferdinand Möbius](#) nel [1832](#); la notazione $\mu(n)$ è stata introdotta da [Franz Mertens](#) nel [1974](#).

Come [successione di interi](#) la funzione di Möbius è reperibile nell'archivio [OEIS](#) in corrispondenza della sigla [A008683](#).

La funzione di Möbius è una funzione incorporata nel sistema computazionale [Mathematica](#); essa viene invocata con una richiesta della forma `MoebiusMu[n]`.

I valori che la funzione assume in corrispondenza dei primi 100 interi positivi sono:

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|----------------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| $\mu(n)$ | +1 | +2 | +3 | +4 | +5 | +6 | +7 | +8 | +9 | +10 | +11 | +12 | +13 | +14 | +15 | +16 | +17 | +18 | +19 | +20 |
| 0+ | 1 | -1 | -1 | 0 | -1 | 1 | -1 | 0 | 0 | 1 | -1 | 0 | -1 | 1 | 1 | 0 | -1 | 0 | -1 | 0 |
| 20+ | 1 | 1 | -1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | -1 | -1 | -1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | -1 | 1 | 1 | 0 |
| 40+ | -1 | -1 | -1 | 0 | 0 | 1 | -1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | -1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | -1 | 0 |
| 60+ | -1 | 1 | 0 | 0 | 1 | -1 | -1 | 0 | 1 | -1 | -1 | 0 | -1 | 1 | 0 | 0 | 1 | -1 | -1 | 0 |

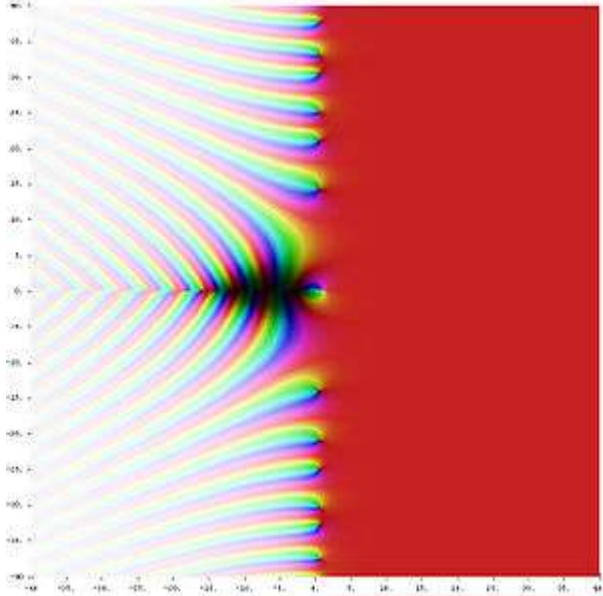
80+ 0 1 -1 0 1 1 1 0 -1 0 1 0 1 1 1 0 -1 0 0 0

un intero $n \neq 0$ tranne che per $n=1$, nel quale vale 1:

2) Funzione zeta, parzialmente da omonima voce di Wikipedia

Funzione zeta di Riemann

Da Wikipedia, l'enciclopedia libera.



La funzione zeta di Riemann nel [piano complesso](#)

In [matematica](#), in particolare nella [teoria dei numeri analitica](#), la **funzione zeta di Riemann** è una [funzione](#) che riveste grande importanza ed ha notevoli risvolti in [fisica](#), [teoria della probabilità](#) e [statistica](#).

I primi risultati riguardanti la serie furono ottenuti da [Leonhard Euler](#) nel diciottesimo secolo, ma il nome deriva da [Bernhard Riemann](#), che nel testo *Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse*, pubblicato nel 1859, stabilì una relazione tra gli [zeri](#) e la [distribuzione dei numeri primi](#).^[1]

Indice

[\[nascondi\]](#)

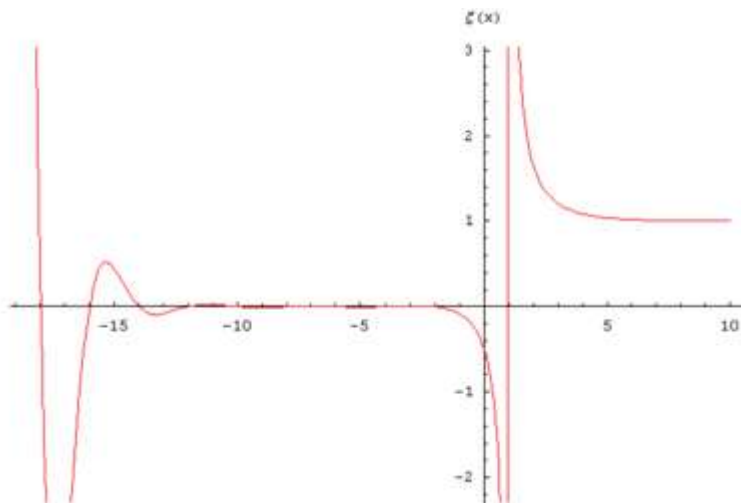
[1 Definizione](#)

[2 Altre definizioni e relazioni importanti](#)

- [2.1 Il Prodotto di Eulero](#)
- [2.2 Equazione funzionale](#)
- [2.3 Relazione di riflessione](#)
- [2.4 Serie di Laurent](#)
- [2.5 Prodotto di Hadamard](#)
- [2.6 Relazione con la funzione digamma](#)

- [2.7 Relazione con la trasformata di Mellin](#)
- [3 I valori della funzione zeta](#)
- [3.1 Estensioni](#)
- [3.2 Altri valori](#)
- [4 L'ipotesi di Riemann](#)
- [4.1 Enunciato](#)
- [4.2 Il Teorema dei numeri primi](#)
- [4.3 Il lavoro di Riemann](#)
- [5 Note](#)
- [6 Bibliografia](#)
- [7 Voci correlate](#)
- [8 Altri progetti](#)
- [9 Collegamenti esterni](#)

Definizione [modifica]



Il grafico cartesiano della funzione zeta per i numeri reali tra -18,5 e 10

Per ogni [numero complesso](#) s con $Re(s) > 1$ la funzione zeta di Riemann si definisce come:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

La [serie](#) converge per $Re(s) > 1$, mentre nel resto del piano complesso si può utilizzare un suo [prolungamento analitico](#), ad esempio sfruttando la relazione di riflessione sotto riportata. In un saggio del [1859 Bernhard Riemann](#) propose un modo per definire la funzione zeta per ogni [numero complesso](#). Per prima cosa Riemann estese questa definizione a tutti i numeri $Re(s) < 0$ con la *relazione di riflessione* (che comunque era già stata suggerita da [Eulero](#)), poi fornì un [prolungamento analitico](#) per ogni [numero complesso](#) $0 < Re(s) < 1$. La funzione è indefinita dunque solo per i valori di

3)Abbondanza (numero abbondante) da Wikipedia

Un **numero abbondante** è un [numero naturale](#) minore della somma dei suoi divisori interi (escludendo sé stesso).

Per esempio, [12](#) è un numero abbondante perché è inferiore alla somma dei suoi divisori: $(1+2+3+4+6)=16$.

I primi numeri abbondanti sono: [12](#), [18](#), [20](#), [24](#), [30](#). Il primo numero dispari abbondante è 945.

Tutti i multipli interi dei numeri abbondanti e dei [numeri perfetti](#) sono a loro volta numeri abbondanti

Griglia delle connessioni tra le varie funzioni e le ipotesi

Segue una griglia che lega le varie funzioni con le RH1, RH2, RH3 ed RH4 equivalenti alla RH, con formule sulle varie connessioni e alcune osservazioni finali sulle progressioni di Dirichlet (Rif.9 da pag 101 e segg.):

| | $\varphi(n)$ | $\mu(n)$ | $\sigma(n)$ | $\pi(n)$ | $\zeta(n)$ | $\Theta(n)$ | $Li(n)$ | $L(n)$ | RH |
|-------------|-----------------|----------|-------------|----------|------------|-------------|---------|--------|-----|
| $\Phi(n)$ | si (1) si(9) | si (2)g | si(3) | no | | no | no | si(g) | |
| $\mu(n)$ | | | no | si(6) | no | no | no | no | |
| $\sigma(n)$ | | | | no | no | no | no | si(g) | RH1 |
| $\pi(n)$ | | | | | si (8,10) | no | si(7) | no | RH3 |
| $\zeta(n)$ | | | | | | no | no | no | RH |
| $\Theta(n)$ | | | | | | | no | no | RH4 |
| $Li(n)$ | | | | | | | | no | RH1 |
| $L(n)$ | | | | | | | | | RH |

Formule numerate per le varie connessioni "si" :

$$(1) \quad \sum_d \mu(n/d) = \varphi(n)$$

$$(2) \quad \varphi(\sigma(n)) = n \quad \text{con } n = 2, 8, 12, 128, \dots$$

$$(3) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(n)/(n^s) = \zeta(s-1)/\zeta(s)$$

$$(4) \quad \varphi(p) + \varphi(q) = 2m; \quad p + q = 2m + 2$$

$$(5) \quad L(n) = Hn + e^{\wedge} Hn \cdot \log Hn - \sigma(n), \text{ con } L(n) > 0$$

$$(6) \quad \pi(n) = \sum_{n \leq x} \mu(n)/n * J \sqrt{x}$$

$$(7) \quad \pi(n) \approx \text{Li}(n) = \int_n^x \frac{1}{\log t} dt$$

$$(8) \quad \pi(n) \approx \text{Re}(n) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} (\log n)^k$$

g = grafico simile

Un'altra relazione tra $\varphi(n)$ e $\pi(n)$ è la formula (9):

$$\pi(x, a, b) / (x / \log x) \rightarrow 1 / \varphi(a) \quad (9)$$

connessa ad una generalizzazione della RH (GRH) ad opera di Dirichlet con le sue funzioni L; e si riferisce alle progressioni $an + b$, per esempio $4n + 3$ o $6n + 5$ quest'ultima equivalente a $6(n+1) - 1 = 6k - 1$, che insieme alla $6k + 1$, è una delle forme generatrici di numeri primi: $P = 6k \pm 1$ con eccezione del 2 e del 3, e di tutti i prodotti tra primi (senza fattori 2 e 3) e le potenze dei numeri primi. (Tali forme possono essere scritte anche come $P = 1 \pm 6n$, che danno luogo a numeri primi negativi e positivi, in particolari i numeri gemelli diventano $-p$ e $+q = p + 2$, e ora è la loro somma algebrica ad essere uguale a 2, infatti $q + (-p) = q - p = 2$, e viceversa è la loro differenza algebrica ad essere:

$$q - (-p) = p + q = N = 12n$$

Per la (9) possiamo fare due facili esempi. Poiché fino a $x = 40$ ci sono 5 primi di forma $4a + 3$ (7, 11, 19, 23 e 31) (dalla progressione $4n + 3$, con $a = b = 7$), applicando la

(9) abbiamo:

$$5/40/3,68... = 5/40/\log 40 = 5/10,86 = 0,4604051 \rightarrow 1/\varphi(7) = 1/6 = 0,16$$

Mentre per la forma $6n + 5 = 6(n+1) - 1 = 6n' - 1$, (con $n' = a = 5$) fino a $x = 40$ ci sono anche qui 5 primi (5, 11, 17, 23 e 29) e anche qui abbiamo 0,4604051 ma ora con $0,4604051 \rightarrow 1/\varphi(5) = 1/4 = 0,25$.

Da notare che la forma $4n + 3$ dà in ordine numeri primi di forma $6k + 1$, numeri primi di forma $6k - 1$ e numeri dispari composti multipli di 3 (se anche n lo è) o multipli di 5, 7, ecc.

Per esempio:

| n | $4n + 3 =$ | x | Primo e forma O Composto |
|----|------------|------|-----------------------------|
| 1 | 4 3 | 7 | Primo $6 \times 1 + 1$ |
| 2 | 8 3 | 11 | Primo $6 \times 2 - 1$ |
| 3 | 12 3 | 15 c | Composto 3×5 |
| 4 | 16 3 | 19 | |
| 5 | 20 3 | 23 | Primo $6 \times 4 - 1$) |
| 6 | 24 3 | 27 c | Composto 3×9 |
| 7 | 28 3 | 31 | Primo $6 \times 5 + 1$ |
| 8 | 32 3 | 35 c | Composto 5×7 |
| 9 | 36 3 | 39 c | Composto 3×13 |
| 10 | 40 3 | 43 | Primo $6 \times 7 + 1$ |
| 11 | 44 3 | 47 | Primo $6 \times 8 - 1$ |
| 12 | 48 3 | 51 c | Composto 3×17 |

Mentre le forme $6n + 1$ e $6nk - 1$ danno circa metà dei numeri primi fino a x , e composti senza fattori 2 e 3:

| n | $6n - 1$ | $6n + 1$ |
|----|-------------|--------------------|
| 1 | 5 | 7 gemelli |
| 2 | 11 | 13 gemelli |
| 3 | 17 | 19 gemelli |
| 4 | 23 | 25 = 5 x 5 gemelli |
| 5 | 29 | 31 |
| 6 | 35 = 5 x 7 | 37 |
| 7 | 41 | 43 gemelli |
| 8 | 47 | 49 = 7 x 7 |
| 9 | 53 | 55 = 5 x 11 |
| 10 | 59 | 61 gemelli |
| 11 | 65 = 5 x 13 | 67 |
| 12 | 71 | 73 gemelli |

In tali forme, i numeri gemelli condividono lo stesso k. Poiché i numeri primi si distribuiscono quasi equamente in entrambe le colonne (con leggera preferenza per la forma $6k-1$, Eulero), abbiamo che $\pi(N)/2 \approx \pi(N)/2$; $\pi(73)/2 = 10$ di forma $6k-1$; $\pi(73)/2 = 9$ di forma $6n+1$, quindi $10 \sim 9$, essendo $\pi(73) = 19 = 10 + 9$

Quindi le progressioni di Dirichlet possono portare a questi e ad altri risultati, ma per i nostri scopi bastano questi.

Una relazione indiretta (che permette risultati esatti per il calcolo di $\pi(N)$ tra funzione zeta e funzione $\pi(N)$) è la seguente, tratta dal libro di Derbyshire, pag. 343 e che connette la funzione scalino $J(x)$ con la funzione $Li(x)$ e con la funzione zeta tramite gli ρ = zeri della funzione zeta $\zeta(s)$ di Riemann, è la seguente:

$$J(x) = \text{Li}(x) - \sum_{\rho} \text{Li}(x^{\rho}) - \log 2 + \int_2^{\infty} \frac{dt}{t(t-1) \log t} \quad (10)$$

Nota. Chiarimento dell'Autore a pag. 345:

“Il simbolo Σ rappresenta un invito a sommare insieme molte cose. Le cose da sommare sono indicate dalla piccola lettera $\ll \rho \gg$ scritta sotto il simbolo. Non è una $\ll p \gg$, è una $\ll \rho \gg$, la diciassettesima lettera dell'alfabeto greco, e in questa simbologia sta per $\ll \text{radice} \gg$: per ρ calcolare questo termine secondario dovete sommare $\text{Li}(x^{\rho})$ per tutte queste radici, con ρ che prende il valore di una radice dopo l'altra. E che cosa sono queste radici? Beh, sono gli zeri non banali della funzione zeta di Riemann! “

Un esempio di calcolo esatto di $\pi(1\,000\,000) = 78\,498$

è riportato a pag. 359.

Un'altra relazione tra funzione $\varphi(n)$ e funzione $\zeta(z)$ la troviamo nel nostro lavoro “Sulle spalle dei giganti” (Rif.9), pag. 58:

“ *Conseguenze della GRH*

Siano a e d due numeri coprimi; chiamiamo con $\pi(x,a,d)$ il numero di numeri primi in una progressione numerica (una successione) generata con a e d e tale che la progressione sia minore di x , allora *se la GRH è vera* si ottiene che

$$\pi(x,a,d) = \frac{1}{\varphi(d)} \int_2^x \frac{1}{\ln t} dt + O(x^{1/2 + \varepsilon}), \quad x \rightarrow \infty$$

dove $\varphi(d)$ è la funzione totiente di Eulero e l'integrale Li (Logaritmo integrale

Se la GRH è vera seguono varie cose, alcune delle quali sono:

- la congettura di Goldbach è vera (vedi nostra dimostrazione in Rif. 9)
- l'algoritmo di Shank – Tonelli termina in tempo polinomiale
- il test di primalità di Miller –Rabin termina in tempo polinomiale”

Altre relazioni (vedi TABELLA)

Relazioni tra funzioni e numeri n di forma $6k$ e $6k \pm 1$

| <u>Funzioni</u> | <u>Valori massimi (assoluti)</u> | <u>valori minimi</u> |
|--|----------------------------------|--------------------------------------|
| $\Sigma(n)$ (somma divisori) | $6n$ | $6n \pm 1$ |
| $G(N)$ (Goldbach) | $6n$ | $6n \pm 2$ |
| $M(n)$ (funzione mu) | $6n \pm 1$ (1 e -1) | $6n$ (-1 e 0) |
| $\phi(n)$ (funzione totiente) | $6n \pm 1$ | $6n$ |
| $M(n)$ Funzione Mertens | $6n \pm 1$ | $6n$, e altre forme, per es. $6n-2$ |
| $\Sigma(z)$ (funzione zeta) $6n \pm 1$ | | |

connessa ai numeri primi, di forma $6n \pm 1$ (tranne il 2 e il 3); essa non ha singoli valori per singoli numeri, la sua nota caratteristica (ipotesi di Riemann) è che tutti gli zeri non banali hanno parte reale $1/2$)

Poiché tutte le funzioni sono collegati alla funzione zeta e quindi alla RH, e questa poi anche alle teorie di stringa, ne consegue che per entrambe i numeri ai quali sono connessi sono i numeri di forma $6k$ e i numeri di forma $6n \pm 1$, che presentano i valori massimi o minimi per ciascuna funzione. E i numeri di tali forme possono essere scritto rispettivamente come $0 + 6n = 6n + 0 = 6n$; e $\pm 1 + 6n = 6n \pm 1$; ma i numero 0, $+1$ e -1 sono proprio i tre valori possibili che può assumere la funzione $\mu(n)$. Tale coincidenza è solo un caso?

Uno schema riepilogativo di tutte e sei le forme numeriche) e le tre sole forme numeriche (a destra) preferite dalle tre funzioni:

| N | $6n \pm 4$ | $6n \pm 3$ | $6n \pm 2$ | $6n-1$ | $6n$ | $6n + 1$ | |
|-----|------------|------------|------------|--------|-----------|-----------|-----------|
| 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 2 | | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
| 3 | | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 |
| 4 | | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |
| 5 | | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |

Le tre funzioni particolari $\sigma(n)$, $\mu(n)$ e $\phi(n)$, quest'ultima oggetto di questo lavoro (e infine per altro verso anche la funzione zeta di Riemann) "preferiscono", per qualche ancora misterioso motivo (forse di ordine fisico, visto il coinvolgimento con le teorie di stringa e della funzione zeta), le ultime tre forme a destra ($6n-1, 6n, 6n+1$), assumendo per i numeri di tali forme valori massimi o minimi rispetto alle tre forme a sinistra ($6n \pm 4, 6n \pm 3, 6n \pm 2$); questa proprietà si ripercuote infine nelle loro relazioni con la funzione zeta e quindi con l'ipotesi di Riemann (o una qualche ipotesi RH equivalente, per esempio $\sigma(n)$ con la RH1); e successivamente anche con le teorie di stringa (in particolar modo la funzione zeta) e, quindi, indirettamente, anche tutte le due altre funzioni sopra citate, e che studieremo successivamente alla funzione $\phi(n)$ di questo lavoro.

La natura, per regolare i suoi fenomeni a tutti i livelli (modello standard, cosmologia, ecc.), sembra proprio utilizzare i numeri primi ($6n \pm 1$), con tutte le complicazioni che ciò comporterebbe

(funzione zeta, connessa con varie formule anche alle tre funzioni di cui sopra (vedi anche griglia delle connessioni tra funzioni ed RH equivalenti)

Ecco perché riteniamo importante lo studio approfondito, singolo e collettivo, di queste tre funzioni: esse oltre ad avere importanti risvolti matematici (relazioni con la funzione zeta), potrebbero avere anche risvolti fisici, come per esempio anche la successione di Fibonacci (connessa anch'essa alla funzione zeta e alle teorie di stringa, Rif. 5, 6, e 7)

Riferimenti

- [1] http://it.wikipedia.org/wiki/Funzione_%CF%86_di_Eulero
- [2] *„Dai numeri multipli di 6 alla Riemann Hypothesis (i criteri di Robin e Lagarias)“* Rosario Turco, gruppo Eratostene, sul sito www.gruppoeratostene.com
- [3] *“Abbondanza di Goldbach”*, in sezione “Articoli su Goldbach” sito www.gruppoeratostene.com
- [4] *Procedure per la formazione delle coppie e delle terne di Goldbach ($p + q = N$ pari ed $r + p + q = N'$ dispari)*
- [5] *The Fibonacci's zeta function. Mathematical connections with some sectors of String Theory* Michele Nardelli and Rosario Turco, in sezione “Articoli di Fisica –Matematica” sito www.gruppoeratostene.com
- [6] *Links between string theory and the Riemann's zeta function* Rosario Turco, Maria Colonnese, Michele Nardelli sito www.gruppoeratostene.com
- [7] *Fibonacci, Dimensioni, Stringhe: nuove interessanti connessioni* Francesco Di Noto e Michele Nardelli sito www.gruppoeratostene.com
- [8] http://it.wikipedia.org/wiki/Pseudoprimo_di_Fibonacci
- [9] *Sulle spalle dei giganti* sito www.gruppoeratostene.com
- [10] <http://www.numericana.com/answer/modular.htm#lambda>
- [11] *Scarabocchi sulla primalità* R. Turco sito www.gruppoeratostene.com
- [12] *RH equivalente generale dei numeri naturali* R. Turco, M. Colonnese sito www.gruppoeratostene.com
- [13] http://it.wikipedia.org/wiki/Funzione_sigma