

Cristiano Teodoro
teodorocristiano@tiscali.it

GENERAZIONE DI TERNE PITAGORICHE PRIMITIVE PARTICOLARI (Generation of particular Pythagorean Primitive Triples)

Sommario: nel presente articolo viene proposto ed illustrato un nuovo algoritmo per il calcolo e la generazione di terne pitagoriche primitive aventi, se esistono, cateti la cui differenza è pari a un valore N qualsiasi, scelto in un definito campo di valori numerici, ad esempio tra 1 e 10^{12} . Per avere dei risultati concreti per l'utilizzo di tale algoritmo, si sono realizzati due programmi scritti in linguaggio Qbasic. Il primo programma (il cui listato non è mostrato per non appesantire troppo il presente articolo) risulta dedicato per un dato N alla generazione, se esistono, delle relative terne primitive. Tramite questo programma si può calcolare e generare per il considerato valore di N un limitato numero di terne, precisamente a partire da quelle aventi cateti e ipotenusa più piccoli sino a quelle che si possono ottenere in modo esatto sino alla cifra delle unità. Poiché nelle operazioni aritmetiche in tale programma viene utilizzata la sola doppia precisione le terne generate e presentate sono solo quelle che hanno i valori dei cateti e dell'ipotenusa composti ciascuno da non più di 15 cifre. Il secondo programma, di cui per le stesse suddette ragioni non viene riportato il listato, è dedicato alla generazione di terne con cateti e ipotenusa di valore anche elevato in quanto le operazioni aritmetiche vengono eseguite con una adeguata e originale aritmetica a precisione multipla. È possibile sia l'introduzione di un N qualsiasi scelto entro il campo $1 \div 10^{12}$ di valori, sia la scelta della terna. Eseguendo questo programma si scopre innanzitutto se per il valore scelto di N esistono terne primitive o meno: se non esistono si termina il programma; se invece esistono si vanno a calcolare i valori anche molto grandi della ipotenusa e dei cateti relativi alla ennesima terna primitiva prescelta, ad esempio la 5000^a terna, prendendo in considerazione per l'ordine delle terne il valore crescente della ipotenusa. Un pregio dell'algoritmo è senz'altro quello della rapidità di tempo con cui si possono avere i risultati di terne aventi valori numerici dei cateti e dell'ipotenusa costituiti anche da migliaia di cifre.

Abstract: in this paper we propose and explain a new algorithm for the particular pythagorean primitive triples computation and generation. These triples have the N value as difference between the legs. This gap can have any value between 1 and 10^{12} . We obtain actual results by the implementation of two programs in Qbasic language. The former considers the generation of possible primitive triples pertinent to requested N and compute and produce only the restricted number of primitive triples, calculated exactly until the least significant digit. Indeed in this program we use only the double-precision arithmetic and we have exact results for triples with hypotenuse and leg, that have numerical values with a digit number ≤ 15 . The second program is pertinent to computation and generation of triples with the legs and the hypotenuse having as well big values, because we employ an original multiple-precision arithmetic. In this program, introducing any chosen N value in the range $1 \div 10^{12}$ we find if for this N there are primitive triples or not. If so we compute the big numerical values of hypotenuse and legs relative to the n th selected triple, for example the ten 5000^a triple, considering for the triples serial number the increasing hypotenuse value. The merit of this algorithm is the time rapidity for the numerical values achievement.

1 – Introduzione

In articoli comparsi anche recentemente sul web [DM] si è parlato di Terne Pitagoriche, del problema di trovare terne particolari e di calcolare con metodi efficienti i triangoli rettangoli aventi cateti la cui lunghezza è data da numeri interi consecutivi. Qui ci occuperemo di un problema analogo, ma più generale rivolto sempre a considerare terne particolari ed al calcolo dei loro valori numerici. Le Terne che prenderemo in considerazione saranno quelle che possiedono insieme le tre seguenti caratteristiche:

- 1) - terne con l'ipotenusa e cateti costituiti da numeri interi
- 2) - terne per le quali la differenza fra i valori numerici dei due cateti è un valore numerico

prefissato N , da poter scegliere fra un qualsiasi valore nel campo $1 \leq N \leq Nm$ con Nm ad esempio pari a 10^{12}

3) - terne denominate primitive, cioè quelle con cateti ed ipotenusa non aventi fattori comuni, cioè primi fra loro .

Prima di passare a calcolare ed a trovare i valori numerici esatti, anche elevati, dei cateti e della ipotenusa, risulta necessario individuare per quali valori di N esistono Terne con i requisiti richiesti. In TABELLA 1 si riportano ad esempio nel campo esplorato da 1 a 100 i valori di N solo in corrispondenza dei quali esistono terne primitive; in essa sono anche mostrati per ciascun N i valori della ipotenusa e dei cateti riguardanti la **terna primitiva** avente i valori numerici più piccoli

TABELLA 1

 N 	ipotenusa	cateto minore	cateto maggiore
1	5	3	4
7	13	5	12
17	25	7	24
23	37	12	35
31	41	9	40
41	85	36	77
47	65	16	63
49	61	11	60
71	85	13	84
73	125	44	117
79	101	20	99
89	149	51	140
97	113	15	112

Con l'algoritmo che si vuole proporre, la ricerca della esistenza di tale tipo di **terna primitiva** può effettuarsi in un tempo molto contenuto per un qualsiasi N anche elevato entro il campo di esplorazione menzionato in 2).

In TABELLA 2 si riportano alcuni altri esempi di valori N scelti nel campo $1 \div 10^{12}$ per ciascuno dei quali esistono terne primitive; per ciascun N i valori riportati della ipotenusa e dei cateti sono relativi alla **prima terna primitiva**, quella cioè avente l'ipotenusa più piccola.

TABELLA 2

N	ipotenusa	cateto minore	cateto maggiore
829	901	60	899
6991	11105	3536	10527
49871	80609	26320	76191
123457	142705	18096	141553
1234567	1441765	66985061	161450580
42221143	48424157	5848532	48069675
94465519	174794989	66985061	161450580
889901311	1469863201	494487840	1384189151
1000000007	1292045917	264651108	1264651115
9098765431	10249593625	1092443376	10191208807
1000000000007	1309432666813	279299014788	1279299014795

Si può facilmente verificare che i valori numerici dell'ipotenusa e dei cateti posti sulla stessa riga non hanno fra loro fattori in comune, sono cioè coprimi, come infatti deve essere. Pertanto ogni terna riportata in tabella è di tipo primitivo.

2 - Illustrazione dell' algoritmo

2.1 formule di Euclide e equazioni diofantee

Illustriamo ora l'algoritmo partendo dalle seguenti formule relative all'ipotenusa ed ai cateti di un triangolo rettangolo, formule già note dall'antica Grecia (Euclide, Diofanto) [Be], [Da], [CR], [H.W.]:

cateto 1: $C1 = m^2 - n^2$; cateto 2: $C2 = 2 \cdot m \cdot n$; ipotenusa: $A = m^2 + n^2$

dove m e n sono numeri interi positivi.

Per le terne pitagoriche che vogliamo considerare, vale a dire per quelle terne che hanno i cateti che differiscono di un valore N cioè $N = |C1 - C2|$ od anche $C1 - C2 = \pm N$ si ha:

$$m^2 - n^2 = 2 \cdot m \cdot n \pm N \quad \text{equivalente a} \quad m^2 + n^2 - 2 \cdot m \cdot n - 2 \cdot n^2 = \pm N$$

che è conveniente scrivere come segue: $(m - n)^2 - 2 \cdot n^2 = \pm N$

posto $x = m - n$ ed $y = n$ risulta la seguente relazione:

$$x^2 - 2 \cdot y^2 = \pm N$$

che rappresenta le due equazioni quadratiche indeterminate:

$$x^2 - 2 \cdot y^2 = N \quad (1)$$

$$x^2 - 2 \cdot y^2 = -N \quad (2)$$

Per ognuna di esse occorrerà trovare per le incognite x e y i valori numerici interi minimi che la soddisfano. Una volta trovati tali valori, essendo $m = x + y$ e $n = y$ si potrà risalire ai valori dei cateti $C1$, $C2$ e della ipotenusa A tramite le formule sopra dette:

$$C1 = (x + y)^2 - y^2 ; \quad C2 = 2 \cdot (x + y) \cdot y ; \quad A = (x + y)^2 + y^2$$

2.2 - Considerazioni sull'equazione $x^2 - 2 \cdot y^2 = N$

Per trovare i più piccoli valori per x ed y che soddisfano l'equazione $x^2 - 2 \cdot y^2 = N$, dato che il coefficiente di y^2 è piccolo ed il valore di N da prendere in considerazione è relativamente piccolo (massimo valore di N preso in esame $N_m = 10^{12}$) si può fare ricorso alla ricerca esaustiva (brute - force search) dei suddetti valori impiegando anche così un tempo di calcolo breve in quanto, indicati con x_1 e y_1 rispettivamente il più piccolo valore positivo per x ed il più piccolo valore positivo per y che soddisfano l'equazione (1), si dimostra [Fr], [Na], [Ro] che essi devono trovarsi, se esistono, nel seguente campo limitato di interi:

$$\text{per } x \quad 1 < x_1 < \sqrt{2 \cdot N}$$

$$\text{per } y \quad 1 < y_1 < \sqrt{\frac{N}{2}}$$

Se entro i campi suddetti non si trovasse nessun valore di x o di y tali da soddisfare l'equazione (1) si può concludere che essa non è risolvibile. Si noti che la ricerca di y_1 anche per valori di N dell'ordine di 10^{12} è ristretta ad un valore non superiore a 707106

Ad esempio per $N = 10^{12} + 7$ i valori di x_1 e y_1 che soddisfano la (1) sono i seguenti:

$x_1 = 1014955$; $y_1 = 122747$; come si può facilmente verificare. Il tempo di calcolo per trovare tali valori risulta al massimo di qualche decimo di secondo (vedi più sotto Esempio1) anche con l'utilizzo di un microprocessore non particolarmente sofisticato.

Se tuttavia si prende in considerazione un valore N per il quale non esistono terne primitive occorrerà esplorare per y tutto il suddetto campo: ad esempio per $N = 10^{12} + 3$ si dovrà andare a saggiare y fino al

valore $\sqrt{\frac{N}{2}} = 707106$ con un tempo anche qui al massimo di qualche decimo di secondo (< 0.8 secondi)

con il normale computer commerciale utilizzato nei programmi che sono stati realizzati.

Una volta trovati x_1 e y_1 per calcolare i successivi valori di x e y che soddisfano la (1) in modo da rendere molto veloce il loro calcolo si possono utilizzare le seguenti originali formule iterative:

$$x_k = x_{k-1} + 2 \cdot y_{k-1} \quad (3)$$

$$y_k = x_{k-1} + y_{k-1} \quad (4)$$

con $k = 2, 3, 4, \dots$ e dove i valori iniziali x_1 e y_1 sono gli interi positivi più piccoli, trovati con la ricerca esaustiva che soddisfano la (1).

Non è infatti difficile dimostrare per induzione quanto segue :

a) oltre i valori iniziali x_1 e y_1 , i valori x_k e y_k trovati con le formule suddette relativi agli indici dispari di k , cioè i valori x_3, x_5, x_7, \dots ed i corrispondenti valori y_3, y_5, y_7, \dots sono valori che soddisfano l'equazione $x^2 - 2 \cdot y^2 = N$ (1)

b) i valori di x_k e y_k trovati con le formule suddette relativi agli indici pari di k , cioè e i corrispondenti y_2, y_4, y_6, \dots sono valori che soddisfano l'equazione $x^2 - 2 \cdot y^2 = -N$

2.3 - Considerazioni sull'equazione $x^2 - 2 \cdot y^2 = -N$

Analogamente per l'equazione $x^2 - 2 \cdot y^2 = -N$ tramite sempre una ricerca esaustiva i più piccoli interi positivi x_1 e y_1 che soddisfano l'equazione, se esistono, devono trovarsi nel seguente campo di valori [Fr],[Na][Ro]:

$$\begin{array}{l} \text{per } x \quad 1 < x_1 < \sqrt{NA} \\ \text{per } y \quad \sqrt{\frac{NA}{2}} < y_1 < \sqrt{NA} \quad \text{dove } NA = |-N| \end{array}$$

Essendo il campo di ricerca anche qui abbastanza limitato si possono rapidamente trovare tali valori.

Prendendo in considerazione sempre le formule iterative (3) e (4) e considerando i valori positivi più piccoli di x e di y soddisfacenti la (2) quali valori iniziali x_1 e y_1 risulta che:

- a1) oltre i valori iniziali x_1 e y_1 , i valori x_k e y_k trovati con le formule suddette relativi agli indici dispari di k , cioè i valori x_3, x_5, x_7, \dots ed i corrispondenti valori y_3, y_5, y_7, \dots sono valori che soddisfano la $x^2 - 2 \cdot y^2 = -N$
- b1) i valori x_k e y_k trovati con le formule suddette relativi agli indici pari di k , cioè x_2, x_4, x_6, \dots e i corrispondenti y_2, y_4, y_6, \dots sono valori che soddisfano l'equazione $x^2 - 2 \cdot y^2 = N$

2.4 - Calcolo delle terne pitagoriche primitive

Tenendo ora presente le formule di Euclide e che $m = x + y$ ed $n = y$, si possono innanzitutto trovare i valori dei cateti e dell'ipotenusa della **terna pitagorica più piccola** che presenta le caratteristiche 1) e 2) sopra enunciate:

$$C1_1 = (x_1 + y_1)^2 - y_1^2 \quad C2_1 = 2 \cdot (x_1 + y_1) \cdot y_1 \quad A_1 = (x_1 + y_1)^2 + y_1^2$$

Per controllare inoltre se la terna risulta avere anche caratteristica 3), cioè se essa è primitiva, occorre verificare che i valori $(x_1 + y_1)$ e y_1 siano fra loro primi e non entrambi dispari [C.R] [Sh].

Poiché conosciamo, per quanto illustrato sopra, i successivi valori x_k e y_k soddisfacenti l'equazione, potremo ricavare con l'utilizzo delle formule iterative (3) e (4) tutte le altre terne pitagoriche anch'esse, come è facile dimostrare, tutte primitive, eseguendo i seguenti due cicli di istruzioni scritti qui linguaggio QBasic:

1° ciclo, relativo alla equazione $x^2 - 2 \cdot y^2 = N$ con $x = x_1$ e $y = y_1$ quali valori interi positivi più piccoli soddisfacenti tale equazione:

```

x = x1 : y = y1
FOR h = 2 to n
  xo = x
  x = x + 2 * y
  y = xo + y
  m = x + y : n = y
  A = m ^ 2 + n ^ 2
  C1 = 2 * m * n :
  C2 = m ^ 2 - n ^ 2
  PRINT k ; x, y, A ; C1 ; C2
NEXT k

```

2° ciclo, relativo alla equazione $x^2 - 2 \cdot y^2 = -N$ con $x = x_1$ e $y = y_1$ quali valori interi positivi più piccoli soddisfacenti tale equazione:

```

x = x1 : y =y1
FOR h = 2 to n
  x0 = x
  x = x + 2 * y
  y = x0 + y
  m = x + y : n = y
  A = m ^ 2 + n ^ 2
  C1 = 2 * m * n :
  C2 = m ^ 2 - n ^ 2
  PRINT k ; x, y, A ; C1 ; C2
NEXT k

```

Si vuol mettere in evidenza che è necessario effettuare la ricerca dei valori di m e di n e quindi dei valori della ipotenusa A e dei cateti $C1$ e $C2$ sia per il valore $+N$ che per il valore $-N$, in quanto, ad eccezione di $N = \pm 1$, si ottengono differenti valori nell'uno e nell'altro caso (vedasi per chiarire quanto detto i risultati riportati nell'Esempio 4 relativo a $N = \pm 47$)

Per $N = \pm 1$ risulta però sufficiente effettuare la ricerca solo per il valore $N = -1$.

Può anche risultare che per il valore positivo di N esistono terne primitive mentre per il valore negativo di N non esistono terne primitive o viceversa. Ad esempio per $N = 343$ esistono terne primitive mentre per $N = -343$ non esistono. Viceversa per $N = 3577$ non ci sono terne primitive mentre per $N = -3577$ esistono terne primitive.

Per avere dei risultati concreti si sono sviluppati due programmi in linguaggio Qbasic che presentano le prestazioni desiderate.

Con il 1° programma, per il quale ci si limita ad utilizzare la aritmetica a doppia precisione offerta dal software del QBASIC, introducendo un N qualsiasi ($N =$ differenza di valore fra i due cateti) entro il campo $1 \div 10^{12}$ di suoi possibili valori ed eseguendo il programma, si scopre innanzitutto se le terne relative a tale N sono primitive o meno: se non sono primitive si termina il programma. Se invece esistono terne primitive si trovano tutte le

terne primitive aventi un valore per l'ipotenusa non superiore a 10^{15} e relative sia al valore $+N$ che al valore $-N$, partendo a presentare per ognuna delle due serie di terne i risultati numerici dalla terna avente l'ipotenusa di più piccolo valore.

In effetti ci si limita a trovare ed a mostrare solo quelle terne che presentano valori numerici esatti sino alla cifra delle unità in quanto con l'uso della l'aritmetica a doppia precisione si ottengono nei calcoli risultati esatti solo se essi sono costituiti da non più di 15 cifre.

Si riporta qui di seguito qualche esempio di quello che compare sullo schermo del monitor eseguendo il programma.

Esempio 1

Quale differenza N vuoi fra i due cateti? 100000000007
 le terne relative a 100000000007 sono primitive;
 valori iniziali: x = 1014955 y = 122747

1	1309432666813	1279299014788	1279299014795
2	7045494059605	5456762378004	4456762377997
3	40963531690817	28461275253208	29461275253215
4	238735696085297	169310889141272	168310889141265
5	1391450644820965	983404059594396	984404059594403
TERNA	IPOTENUSA	CATETO	CATETO

le terne relative a -1000000000007 sono primitive;
 valori iniziali: x = 499521 y = 790418

1	2288703238445	2039182009004	1039182008997
2	13022837751337	8694952503888	9694952503895
3	75848323269577	54130533014352	53130533014345
4	442067101866125	312088245582196	313088245582203
TERNA	IPOTENUSA	CATETO	CATETO

PRIME 9 TERNE PRIMITIVE CON DIFFERENZA FRA I CATETI PARI A 100000000007
 tempo di calcolo: .21875 secondi

Esempio 2

Quale differenza N vuoi fra i due cateti? 889701311
 le terne relative a 889701311 sono primitive
 valori iniziali: x = 31231 y = 6545

1	1469863201	494487840	1384189151
2	8166943585	6202592544	5312891233
3	47531798309	33162262180	34051963491
4	277023846269	196329785780	195440084469
5	1614611279305	1141257647256	1142147348567
6	9410643829561	6654774903000	6653885201689
7	54849251698061	38783832965500	38784722666811
8	319684866358805	226051781695244	226050891993933
TERNA	IPOTENUSA	CATETO	CATETO

le terne relative a -889701311 sono primitive
 valori iniziali: x = 18141 y = 24686

1	2443550525	2114454644	1224753333
2	14009067529	9451062360	10340763671
3	81610854649	58150724760	57261023449
4	475656060365	335894480956	336784182267
5	2772325507541	1960774966220	1959885264909
6	16158296984881	11425196511120	11426086212431
7	94177456401745	66593962905744	66593073204433
8	548906441425589	388135022118100	388135911819411
TERNA	IPOTENUSA	CATETO	CATETO

PRIME 16 TERNE CON DIFFERENZA FRA I CATETI PARI A 889701311
 tempo di calcolo: 0 secondi

Se per il valore $|N|$ scelto quale differenza fra i due cateti non esistono terne pitagoriche primitive eseguendo il programma sullo schermo del monitor comparirà un risultato come quello qui presentato per $|N| = 3$

Esempio 3

Quale differenza N vuoi fra i due cateti? 3
per N = 3 NON ci sono TERNE PRIMITIVE

Esempio 4

Quale differenza N vuoi fra i due cateti? 47
le terne relative a 47 sono primitive;
valori iniziali: x = 7 y = 1

1	65	16	63
2	353	272	225
3	2053	1428	1475
4	11965	8484	8437
5	69737	49288	49335
6	406457	287432	287385
7	2369005	1675116	1675163
8	13807573	9763452	9763405
9	80476433	56905408	56905455
10	469051025	331669184	331669137
11	2733829717	1933109508	1933109555
12	15933927277	11266988052	11266988005
13	92869733945	65668818616	65668818663
14	541284476393	382745923832	382745923785
15	3154837124413	2230806724188	2230806724235
16	18387738270085	13002094421484	13002094421437
17	107171592496097	75781759804528	75781759804575
18	624641816706497	441688464405872	441688464405825

TERNA IPOTENUSA CATETO CATETO

le terne relative a -47 sono primitive;
valori iniziali: x = 5 y = 6

1	157	132	85
2	905	616	663
3	5273	3752	3705
4	30733	21708	21755
5	179125	126684	126637
6	1044017	738208	738255
7	6084977	4302752	4302705
8	35465845	25078116	25078163
9	206710093	146166132	146166085
10	1204794713	851918488	851918535
11	7022058185	4965344984	4965344937
12	40927554397	28940151228	28940151275
13	238543268197	168675562572	168675562525
14	1390332054785	983113224016	983113224063
15	8103449060513	5730003781712	5730003781665
16	47230362308293	33396909466068	33396909466115
17	275278724789245	194651453014884	194651453014837

TERNA IPOTENUSA CATETO CATETO

PRIME 35 TERNE CON DIFFERENZA FRA I CATETI PARI A 47
tempo di calcolo: .046875 secondi

Considerando sempre il summenzionato programma, con semplici modifiche ed opportune istruzioni da effettuare su di esso si possono ricavare entro un campo scelto di valori tutti e soli i valori di N per i quali esistono terne pitagoriche primitive, come pure il loro numero e la loro percentuale rispetto al totale dei valori esplorati. Ad esempio nel campo esplorato $40001 \div 5000$ si può ottenere sullo schermo del monitor il riquadro sottostante in cui compaiono tutti e soli i valori positivi e negativi di N per i quali esistono terne primitive con una percentuale de 9.5 % per valori positivi di N e del 9.2% per valori negativi di N.

<p>a quale N iniziale ? 4000 a quale N finale ? 5000 Valori di N fra 4000 e 5000 per i quali ci sono terne pitagoriche primitive:</p> <p>4001 4007 4039 4049 4057 4063 4073 4079 4097 4111 4127 4129 4151 4153 4159 4177 4183 4193 4201 4207 4217 4223 4231 4241 4247 4249 4271 4273 4289 4297 4319 4327 4337 4361 4369 4391 4393 4409 4417 4423 4439 4441 4447 4457 4463 4471 4481 4487 4513 4519 4529 4559 4561 4567 4577 4583 4591 4607 4633 4639 4649 4657 4663 4673 4679 4681 4703 4711 4721 4729 4751 4753 4759 4777 4783 4793 4799 4801 4817 4831 4841 4871 4879 4889 4903 4913 4919 4937 4943 4951 4967 4969 4991 4993 4999</p> <p>numero di valori positivi di N per i quali vi sono terne primitive: 95</p> <p>-----</p> <p>-4001 -4007 -4039 -4049 -4057 -4063 -4073 -4079 -4097 -4111 -4127 -4129 -4151 -4153 -4159 -4177 -4183 -4193 -4201 -4207 -4217 -4223 -4231 -4241 -4247 -4249 -4271 -4273 -4289 -4297 -4319 -4327 -4337 -4369 -4391 -4393 -4409 -4417 -4423 -4439 -4441 -4447 -4457 -4463 -4471 -4481 -4487 -4513 -4519 -4529 -4559 -4561 -4567 -4577 -4583 -4591 -4607 -4633 -4639 -4649 -4657 -4663 -4673 -4679 -4681 -4703 -4711 -4721 -4729 -4751 -4759 -4777 -4783 -4793 -4799 -4801 -4817 -4831 -4841 -4871 -4879 -4889 -4903 -4919 -4937 -4943 -4951 -4967 -4969 -4991 -4993 -4999</p> <p>numero di valori negativi di N per i quali vi sono terne primitive: 92 numero totale di valori positivi e negativi di N per i quali vi sono terne primitive: 187</p>
--

Con il secondo programma le istruzioni per le operazioni aritmetiche vengono effettuate con una adeguata e originale aritmetica a precisione multipla, e introducendo anche qui un valore N qualsiasi (dove $N =$ differenza di valore fra i cateti C_1 e C_2 due cateti) entro il campo $1 \div 10^{12}$ di possibili suoi valori. Eseguendo il programma si scopre innanzitutto se le terne relative a tale valore di N sono primitive o meno. Se non sono primitive si termina il programma, se invece esistono si vanno a calcolare i valori anche molto grandi della ipotenusata e dei due cateti relativi alla **terna ennesima primitiva prescelta**, prendendo in considerazione per l'ordine delle terne il valore crescente della ipotenusata.

Qui di seguito si mostra nella **TABELLA 4** qualche esempio riguardante i tempi necessari per il calcolo dei valori numerici dell'ipotenusata e dei cateti riguardanti la terna ennesima prescelta in relazione al valore N considerato, dando anche il numero di cifre di cui risulta composto il valore della ipotenusata.

TABELLA 4

N C1 -C2	TERNA n-esima	n° cifre dell'Ipotenusa	tempo di calcolo (secondi)
123457	100 ^a	44	immediato
123457	500 ^a	197	0.06
123457	1000 ^a	388	0.1
123457	5000 ^a	1919	1.5
123457	10000 ^a	3833	5.5
123457	15000 ^a	5747	11.9
123457	20000 ^a	7661	20.8
123457	30000 ^a	11489	45.5
123457	40000 ^a	15316	80.5
123457	50000 ^a	19144	124.3

Nella TABELLA 5 vengono riportati per diversi valori di N il numero di cifre che compongono il valore numerico dell'ipotenusa ed il tempo impiegato per il calcolo dei valori dell'ipotenusa e dei cateti relativi alla 10000^a terna primitiva TABELLA 5

TABELLA 5

N C1-C2	TERNA n-esima	n° cifre della Ipotenusa	tempo di calcolo (secondi)
1	10000 ^a	7656	20.9
7	10000 ^a	3829	5.49
41	10000 ^a	3829	5.49
829	10000 ^a	3831	5.49
6991	10000 ^a	3832	5.5
49871	10000 ^a	3833	5.49
123457	10000 ^a	3833	5.5
1234567	10000 ^a	3834	5.48
54267337	10000 ^a	3836	5.5
94465519	10000 ^a	3836	5.5
889701311	10000 ^a	3837	5.5
100000007	10000 ^a	3837	5.54
57485271799199	10000 ^a	3847	7.80

Si riportano qui di seguito alcuni esempi di calcolo per le TPPP utilizzando una aritmetica precisione multipla

1° ESEMPIO: riguarda il calcolo dei valori dei cateti e della ipotenusa relativi alla 1000^a terna con differenza fra i cateti pari a $N = \pm 103$

quale terna n -esima vuoi visualizzare? 1000 –esima

quale differenza N vuoi fra i cateti ? 103

per N = 103 si hanno terne primitive

valori iniziali per N = 103 : x = 11 y = 3

per N = -103 si hanno terne primitive

valori iniziali per N = -103 : x = 5 y = 8

valore del CATETO 1

1644201 5637823 9060551 1515357 4468539 1049083 0561460 5969490 1538214 4359910
2889365 3856094 6921009 9013590 9774860 5329182 0099160 5175905 0629035 6028735
3693480 2115155 7706243 9901304 9899228 6023473 7174635 5250427 6678436 2482503
6421106 7035065 8761392 4187496 8031438 1545012 4638040 7698016 9479649 4196608
5121192 9529669 2445022 9088390 4431030 4589031 5054645 8531511 0489618 4803549
4911660 4924233 0348447 2746021 0140584

numero di cifre del cateto 1: 385

valore del CATETO 2

1644201 5637823 9060551 1515357 4468539 1049083 0561460 5969490 1538214 4359910
2889365 3856094 6921009 9013590 9774860 5329182 0099160 5175905 0629035 6028735
3693480 2115155 7706243 9901304 9899228 6023473 7174635 5250427 6678436 2482503
6421106 7035065 8761392 4187496 8031438 1545012 4638040 7698016 9479649 4196608
5121192 9529669 2445022 9088390 4431030 4589031 5054645 8531511 0489618 4803549
4911660 4924233 0348447 2746021 0140687

numero di cifre del cateto 2: 385

valore dell'IPOTENUSA

2325252 1507761 0827377 4980904 2029816 2819676 8996621 8332120 4726288 2004174
0044324 1456420 5807270 0081609 1220733 0082069 2606560 5556111 7193162 9244254
5595893 4630823 1217341 1898932 6996158 3921470 8740126 0291884 3751341 2904564
4845349 1195895 9596652 7361972 8585828 4646977 7676020 7628168 9986979 0602651
1912006 2672002 1452076 4504238 2438561 1192231 8511338 4038987 1961459 5666901
4989701 6649695 6520050 1864493 4060305

numero di cifre dell'ipotenusa: 385

tempo di calcolo: 0. 05078125 secondi

**2° ESEMPIO : riguarda il calcolo dei valori dei cateti e della ipotenusa relativi alla
2000^a terna con differenza fra i cateti pari a $N = \pm 7$**

quale terna n-esima vuoi visualizzare? 2000

quale differenza N vuoi fra i cateti? 7

le terne sono primitive ; valori iniziali per $N = 7 : x = 3 \quad y = 1$

le terne sono primitive ; valori iniziali per $N = -7 : x = 1 \quad y = 2$

valore del CATETO 1

718 1938478 8237243 9955152 7671394 5614062 3917917 1531055 9848138 2770597
7785888 1164096 6436498 3415616 9844018 6176412 9280191 6942875 7683967 8350633
9769508 2574673 4409251 2690549 6483646 3630090 7283649 2138464 9298984 5034896
4722689 8350308 3391193 9209655 1007210 2645582 2028974 0093524 4206256 5797181
6827706 3459290 2339492 6399239 0567629 2701261 7251199 3667102 5086182 7956428
9839174 1041758 6087409 0673114 0554256 3957060 4217857 1664157 9635455 7617180
4393078 7550201 7093375 8398900 1023223 5628914 4018126 6429805 3124482 0623105
2696136 2167541 4896509 9717260 3133125 3483191 6160913 7836830 5776318 0305096
7204442 5893198 3271796 0806959 6135579 6795238 2792111 4773690 7828297 9690485
3119118 5043088 9297639 1507827 0704520 7484193 4154621 1311714 0628401 4832064
8146373 7512702 4518012 2971098 7599015 5498809 9501922 1771191 9102319 3746612

numero di cifre del cateto 1: 766

valore del CATETO 2

718 1938478 8237243 9955152 7671394 5614062 3917917 1531055 9848138 2770597
7785888 1164096 6436498 3415616 9844018 6176412 9280191 6942875 7683967 8350633
9769508 2574673 4409251 2690549 6483646 3630090 7283649 2138464 9298984 5034896
4722689 8350308 3391193 9209655 1007210 2645582 2028974 0093524 4206256 5797181
6827706 3459290 2339492 6399239 0567629 2701261 7251199 3667102 5086182 7956428
9839174 1041758 6087409 0673114 0554256 3957060 4217857 1664157 9635455 7617180
4393078 7550201 7093375 8398900 1023223 5628914 4018126 6429805 3124482 0623105
2696136 2167541 4896509 9717260 3133125 3483191 6160913 7836830 5776318 0305096
7204442 5893198 3271796 0806959 6135579 6795238 2792111 4773690 7828297 9690485
3119118 5043088 9297639 1507827 0704520 7484193 4154621 1311714 0628401 4832064
8146373 7512702 4518012 2971098 7599015 5498809 9501922 1771191 9102319 3746605

numero di cifre del cateto 2: 766

valore dell'IPOTENUSA

1015 6794800 8817065 4044354 0685534 6479229 9657817 5518931 1237925 7420391
9267558 7315259 5545129 7997905 5108074 3559913 1340541 0669820 5683725 8283459
7661623 5338190 7465278 8042077 3757564 0211283 2873389 7438386 6688387 2655013
5942008 7976878 7475885 7108758 1899560 5759659 7257616 1234542 5286881 8993285
2463631 1028017 5422419 1137322 0446318 7422909 4334690 7146653 2805173 6032978
9648820 4950397 2369653 9651070 3516128 8365592 4938140 0670861 9302671 7648845
7521912 4360998 6018955 7433586 5483355 5292564 6111423 2311012 4376126 1326294
2467356 1404083 3700635 9871605 3040404 1041218 3189869 9758432 3613303 2614355
7712571 7533203 1395185 7799098 6215760 5178724 1794334 1756151 6123991 3527775
4032195 9250844 7641286 0954239 1433792 7205673 2308933 0231278 1803536 6540928
5813534 0496547 1721851 6014953 5501169 4459286 7430711 2746442 7916772 3159413

numero di cifre dell'ipotenusa: 767

tempo di calcolo : 0.28 secondi

3° Esempio

Calcolo delle TERNE PITAGORICHE PRIMITIVE di valore anche elevato
e che hanno cateti che differiscono fra loro di un valore N

quale differenza N vuoi fra i cateti ? 1

quale terna n-esima vuoi visualizzare? 4000

valore del CATETO 1

968 7202915 9638466 0935853 2303646 7091544 4640145 1529488 7150543 4808629
0194508 7879827 1863118 3784740 0449753 7778255 8966345 1181695 3537087 2718572
3104749 0603266 6588513 6344779 0926819 8075029 8248653 4065223 1303894 4307826
3901618 2048020 1271093 6775765 2189941 8121876 1036720 8615237 8564329 5139028
0510991 9480457 6892786 4930757 1588280 5971852 6070764 9950665 8486051 8967012
0015523 4151177 6250597 2142400 2186593 7873237 8063056 0666593 7839988 2241693
2063120 6773649 1553990 6252214 4961964 0852642 0667525 1614887 0088871 9231077
4233242 2581258 4383319 7627685 1153940 5388225 8249904 2233150 8810129 9406603
0721224 6223524 4622657 3420456 8213766 6209396 8978949 8569209 8453798 8471263
2254466 1774197 6038459 1051346 1197180 8429295 5093729 2248580 2536335 4271327
6714653 5007218 3110383 2946761 6965922 0922593 0712099 3970957 8470602 6340317
5499744 5450160 5316238 8972441 5899434 8280231 3157427 5736023 2435277 8911366
1094306 1449972 8903211 9017502 4879964 7072198 0029453 0509783 2579972 1958041
2556559 2210158 4140054 6981335 1237641 5137080 5444193 7950137 4566235 2964792
7308246 1782084 2625052 9589426 8371328 3423997 9872680 6353784 8591825 0306693
2105126 3615345 0912753 5545899 2848994 5583805 4953423 5532378 4610232 8494016
6778286 3620781 4648707 8051567 9806051 0902608 0694679 2319331 8719610 3150116
6256033 2510198 4440274 0664708 2181933 5050557 1243437 4011219 6814641 4193507
4265821 9951211 5772438 6449198 6946376 9233483 3928437 2171309 8464166 3296732
9266617 8089991 6103934 8893485 6163059 4889860 9495994 3977289 8921611 3099556
3233560 9358074 9118173 4265016 5114772 1025339 3498556 1919491 7526985 3171664
9167911 9169047 3804565 4858945 7576348 6033756 7122140 0182637 6119895 5484584
9627552 7729859 4596675 9926421 6992259 1786930 2315443 2553245 3674414 7302925
2144861 0256407 7146092 3632800 2691633 5217370 8991274 7906624 8523118 8318144
8376328 7430692 3977087 7100740 5062479 9619427 6643013 7695939 5160423 3713682
8047602 9436775 0002610 8869938 0282010 3709688 1086725 2857218 2948960 8594785
2570189 4011066 1342149 5442021 0666721 2032840 0238820 3396924 3224720 6703785
9347025 1789917 9079029 2379057 3124827 4497418 1955545 9173917 3119423 0831786
9848106 1830388 5090242 2214142 6281008 0313698 3239449 4878229 3626068 5713631
9512200 5800184 7458668 9639817 9500228 4742195 8536853 5925378 1802836 6676760
9566027 2701484 4300328 8896079 0240350 2644005 0475893 7223722 6933326 1545193
9644401 0311095 1254638 1496225 6500550 8124559 7802118 1934301 6013266 1926544
2436648 9715109 2860599 8995384 8907078 3363516 4666054 1306490 6407361 0499473
4591232 1756786 8998094 0579665 5781098 5327979 8585606 9466812 0151561 8988013
4199292 8984347 3359962 8069271 5737285 1717828 2532581 0579157 2016450 4963476
4702733 9296623 5353817 1666912 0183092 7565074 9465711 7595407 9379975 7664658
7104494 2096077 4446786 1648437 5217338 4854420 9454666 2533753 5752428 6141451
5568693 7419673 2643971 2851538 1073473 9500800 3971870 8537700 4166633 4436896
0985755 7263529 3405729 9775103 6474578 8506244 9256636 5074862 7626159 9470741
4208251 1311615 7310395 6142357 5810786 9149340 9038812 0949803 6774643 5475680
4907906 0606544 4682660 3496353 3563444 2802554 7769621 1618823 7654001 6816172
1867104 9230016 4738863 4195157 0935975 8048187 2948973 0788328 8416530 5958742
3533296 2188378 7617158 6503251 5831893 9023071 1981036 0755408 8771992 1295057
6934524 0948363 4561666 9361467 4322614 4948354 3593738 3477696

numero di cifre del cateto 1: 3062

se vuoi continuare per vedere le cifre del cateto 2 premi tasto Invio

valore del CATETO 2

968 7202915 9638466 0935853 2303646 7091544 4640145 1529488 7150543 4808629
 0194508 7879827 1863118 3784740 0449753 7778255 8966345 1181695 3537087 2718572
 3104749 0603266 6588513 6344779 0926819 8075029 8248653 4065223 1303894 4307826
 3901618 2048020 1271093 6775765 2189941 8121876 1036720 8615237 8564329 5139028
 0510991 9480457 6892786 4930757 1588280 5971852 6070764 9950665 8486051 8967012
 0015523 4151177 6250597 2142400 2186593 7873237 8063056 0666593 7839988 2241693
 2063120 6773649 1553990 6252214 4961964 0852642 0667525 1614887 0088871 9231077
 4233242 2581258 4383319 7627685 1153940 5388225 8249904 2233150 8810129 9406603
 0721224 6223524 4622657 3420456 8213766 6209396 8978949 8569209 8453798 8471263
 2254466 1774197 6038459 1051346 1197180 8429295 5093729 2248580 2536335 4271327
 6714653 5007218 3110383 2946761 6965922 0922593 0712099 3970957 8470602 6340317
 5499744 5450160 5316238 8972441 5899434 8280231 3157427 5736023 2435277 8911366
 1094306 1449972 8903211 9017502 4879964 7072198 0029453 0509783 2579972 1958041
 2556559 2210158 4140054 6981335 1237641 5137080 5444193 7950137 4566235 2964792
 7308246 1782084 2625052 9589426 8371328 3423997 9872680 6353784 8591825 0306693
 2105126 3615345 0912753 5545899 2848994 5583805 4953423 5532378 4610232 8494016
 6778286 3620781 4648707 8051567 9806051 0902608 0694679 2319331 8719610 3150116
 6256033 2510198 4440274 0664708 2181933 5050557 1243437 4011219 6814641 4193507
 4265821 9951211 5772438 6449198 6946376 9233483 3928437 2171309 8464166 3296732
 9266617 8089991 6103934 8893485 6163059 4889860 9495994 3977289 8921611 3099556
 3233560 9358074 9118173 4265016 5114772 1025339 3498556 1919491 7526985 3171664
 9167911 9169047 3804565 4858945 7576348 6033756 7122140 0182637 6119895 5484584
 9627552 7729859 4596675 9926421 6992259 1786930 2315443 2553245 3674414 7302925
 2144861 0256407 7146092 3632800 2691633 5217370 8991274 7906624 8523118 8318144
 8376328 7430692 3977087 7100740 5062479 9619427 6643013 7695939 5160423 3713682
 8047602 9436775 0002610 8869938 0282010 3709688 1086725 2857218 2948960 8594785
 2570189 4011066 1342149 5442021 0666721 2032840 0238820 3396924 3224720 6703785
 9347025 1789917 9079029 2379057 3124827 4497418 1955545 9173917 3119423 0831786
 9848106 1830388 5090242 2214142 6281008 0313698 3239449 4878229 3626068 5713631
 9512200 5800184 7458668 9639817 9500228 4742195 8536853 5925378 1802836 6676760
 9566027 2701484 4300328 8896079 0240350 2644005 0475893 7223722 6933326 1545193
 9644401 0311095 1254638 1496225 6500550 8124559 7802118 1934301 6013266 1926544
 2436648 9715109 2860599 8995384 8907078 3363516 4666054 1306490 6407361 0499473
 4591232 1756786 8998094 0579665 5781098 5327979 8585606 9466812 0151561 8988013
 4199292 8984347 3359962 8069271 5737285 1717828 2532581 0579157 2016450 4963476
 4702733 9296623 5353817 1666912 0183092 7565074 9465711 7595407 9379975 7664658
 7104494 2096077 4446786 1648437 5217338 4854420 9454666 2533753 5752428 6141451
 5568693 7419673 2643971 2851538 1073473 9500800 3971870 8537700 4166633 4436896
 0985755 7263529 3405729 9775103 6474578 8506244 9256636 5074862 7626159 9470741
 4208251 1311615 7310395 6142357 5810786 9149340 9038812 0949803 6774643 5475680
 4907906 0606544 4682660 3496353 3563444 2802554 7769621 1618823 7654001 6816172
 1867104 9230016 4738863 4195157 0935975 8048187 2948973 0788328 8416530 5958742
 3533296 2188378 7617158 6503251 5831893 9023071 1981036 0755408 8771992 1295057
 6934524 0948363 4561666 9361467 4322614 4948354 3593738 3477697

numero di cifre del cateto 2: 3062

se vuoi continuare per vedere le cifre dell'ipotenusa premi un tasto qualsiasi

valore dell'IPOTENUSA

1369 9773745 2162656 2132594 5168075 0602585 0678248 6656484 3963541 1173782
 7163592 8645488 3782528 3358392 6885022 6506744 6196242 6807411 2892551 5909093
 5704688 9837252 1471876 8170214 8242936 0859295 5070801 5549975 6881035 5730993
 7617404 9872107 7535793 7907920 2716546 9255545 5351321 5482131 6133991 8309779
 4446235 6123810 7980252 3617731 6535104 4274726 7791880 8274614 7199893 3487356
 8310420 0115079 7452932 8483420 0994029 3840205 0770796 8087905 3346030 3366348
 0333260 9102837 0541646 4961571 1142644 1945215 1526909 4381202 6210136 9709334
 5439873 2549235 7335335 2049803 5331264 2074292 8055795 0571898 4700180 8669408
 7993174 0336079 2986602 4671589 2646712 9464235 0620717 4975911 7936944 4491592
 0520929 7569132 8869365 2676455 6381432 4528520 3875668 5736117 8384625 9087920
 8396736 9063949 4727501 3632215 0388568 4628109 4507089 7816490 8887204 9333545
 8744627 1754306 3558724 0020997 9344978 6535219 2367219 0038728 4156217 6537520
 9132998 7063478 9688594 8936477 1877868 7660187 7303604 6764217 3431273 9856514
 5389705 9844250 7500222 2692014 1910221 3794077 8739608 7395357 1270145 7911415
 3313352 2035546 1162163 4276703 4035432 8682713 8532135 3119367 2463366 7042077
 8653490 9705544 9931407 0096238 5151807 8330002 8944112 9288822 6040736 5823198
 6879896 1649364 0612699 3219945 9313931 3865607 5534527 9758127 1355965 2643570
 3022392 9837622 3516847 9015265 5264225 3033393 1683886 8077774 9450896 7397853
 4575719 9162198 5152529 1512458 8935315 9707429 9165301 2925240 7415651 8478875
 6889344 3174328 3939681 8132025 5353605 3171742 0641950 4098267 6622338 9851204
 5195266 5412039 4636339 2212415 9625181 2721756 6003789 4108585 9250358 7217228
 1693767 9300181 3033572 4730861 5328727 0270498 0489135 4082384 7604857 8407349
 0452554 3430959 2354445 9645731 0468085 2954583 5897807 1686780 7006118 4577322
 7837552 6532511 7902873 5304388 3341609 3057639 0500275 0203479 5174874 6093542
 8523189 9549712 8156755 0414399 8942172 3658828 4705963 9185395 9877424 4602454
 1930771 3478113 5312280 1655634 6606358 3485523 2365402 0600976 0883419 8636933
 4051313 1649368 5913310 2981109 2921274 9064188 9655505 4851002 7279266 9932432
 4254502 5134782 7524599 5257953 8593908 9260141 0383790 1654874 8432913 4669470
 9342366 7016100 8099611 0741457 6108286 0981281 2646713 1059257 0204091 2419429
 9821151 3804370 6604826 2841632 5481198 5188857 3558760 8092211 4995132 5581144
 3077003 3318024 4233781 0202311 2210121 4536223 5578810 1763584 2691106 4183385
 3368361 2425862 8392225 9090554 3126777 1840488 7596496 6328711 7573456 2857747
 9371255 3580754 3940844 1302423 2010045 4897025 5132591 2154358 1933345 6902443
 1056958 5349125 1601582 0495689 4260185 1442761 1012187 3385121 2777665 6085943
 4864703 8845632 8650485 2369033 5860254 7386655 8059802 8895278 9467137 9919054
 5452533 3782280 4724958 4579212 7018194 9331566 7781584 0029436 3494843 7471104
 3423162 0853188 3616286 3783319 3297747 2688961 9271574 3167056 3347882 7955216
 9227740 0298667 7923351 2136344 3853338 9533099 1829899 7931442 1013416 9364311
 4016095 3320430 9358467 0064358 3798694 5883907 1595468 6071914 1172377 8258631
 6568399 7307912 0042281 1192156 1681784 8175292 0883837 0690323 1649458 8168359
 5669516 7579781 0596633 5250573 5417207 2968459 7044508 9506949 7763134 6120212
 2373607 7499056 1749467 1070248 8264929 3384163 0337124 6352117 8470800 4776901
 4008195 3462715 8443037 5772363 8604141 2780169 3400918 1555842 9937471 0486245
 6312018 2480594 6105840 7757468 2027180 1418474 3010298 5865665

numero di cifre dell'ipotenusa: 3063

Terna 4000 - esima

tempo di calcolo comprensivo delle pause = 4.328125 secondi

se vuoi trovare un'altra terna pitagorica primitiva premi il tasto S
 e quindi il tasto Invio

altrimenti se vuoi uscire premi il tasto N e quindi tasto Invio

?

4 °Esempio si visualizza sullo schermo del monitor innanzitutto quanto segue:

quale terna n -esima vuoi visualizzare? 13000 - esima
 quale differenza N vuoi fra i cateti ? 329
 per N = 329 si hanno terne primitive
 valori iniziali per N = 329 : x = 19 y = 4
 per N = -329 si hanno terne primitive
 valori iniziali per N = -329 : x = 3 y = 13

vengono quindi calcolati in un tempo inferiore a 12 secondi i valori numerici relativi ai cateti ed alla ipotenusa della 15000-esima terna; questi valori molto grandi vengono mostrati sullo schermo del monitor tramite diverse visualizzazioni. Che non si ritiene opportuno allegare per non appesantire troppo il presente articolo. Qui di seguito vengono dati solo i valori relativi al numero di cifre che compongono ciascun cateto e l'ipotenusa ed anche il tempo di calcolo impiegato per l'ottenimento di tutte le loro relative cifre:

- numero di ciascun cateto: 5744; numero di cifre dell'ipotenusa: 5744;
- tempo di calcolo: \approx 10 secondi

Il tempo di 10 secondi è il tempo impiegato necessario per calcolare, trovare e mostrare sullo schermo del monitor sia i valori numerici dei due cateti sia quello dell'ipotenusa.

RIFERIMENTI

- [Be] A.H. Beiler – Recreations in Theory of Numbers, Ch. XIV – Second Edition
 Dover Publications, Inc., New York 1966
- [CR] R. Courant, H. Robbins – CHE COS'E' LA MATEMATICA , pagg. 87 ÷ 89,
 Editore Boringhieri , Torino , 1964
- [Da] H. Davenport – Aritmetica superiore, Cap.VII - Zanichelli Editore , Bologna 1999
- [DM] G. Di Maria – Articoli sulle Terne Pitagoriche – sito web: Gruppo Eratostene
<http://www.gruppoeratostene.com/>
- [Fr] G.Frattini – *Dell'analisi indeterminata di secondo grado* –Periodico di
 Matematica per l'insegnamento secondario, anno VII – 1892 – Roma, Tipografia
 Elzeviriana
- [HW] G.H. Hardy, E.M. Wrieth –An introduction to the theory of numbers , Fifth edition,
 Ch.XIII, Clarendon Press , Oxford
- [Na] T. Nagell, Introduction to NUMBER THEORY, Ch.VI – Chelsea Publishing
 Company, New York 1984
- [Ro] J. P. Robertson- *Solving the generalized Pell equation $x^2 - D \cdot y^2 = N$*
<http://hometown.aol.com/jpr2718/pell.pdf>
- [Sh] - D. Shanks – Solved and Unsolved Problem in NumberTheory, Ch. III – Chelsea
 Publishing Company, New York 1985

SITI WEB interessanti e relativi alle terne pitagoriche (Pythagorean triples):

<http://www.math.rutgers.edu/~erowland/pythagoreantriples.html>

<http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Pythag/pythag.html#mnformula>

<http://www.londongt.org/mathsk3and4/documents/pythagoreanTriples.pdf>

<http://www.m-a.org.uk/docs/library/2065.pdf>