TEOREMA DI BROCARD - GRUPPO ERATOSTENE

Gruppo Eratostene

La congettura di Brocard dice che:

“ fra i quadrati di due numeri primi , consecutivi e maggiori di 2, ci sono almeno quattro primi”

Non solo tale congettura è vera, ma può essere già estesa al seguente nostro teorema, che proponiamo di chiamare Teorema di Brocard – Gruppo ERATOSTENE:

“Fra i quadrati di due numeri primi p e q, consecutivi (e quindi compresi anche i numeri gemelli) e maggiori di 2, esistono ben n numeri primi, con n uguale a n ≈= (q^2 – p^2) / f, e con f la frequenza media dei numeri primi compresi tra 10^m e 10^(m+1), con 10^m < q^2 < 10^(m+1).

D i m o s t r a z i o n e

Consideriamo il numero più grande q^2: esso è compreso tra le due potenze di 10^m e 10 ^(m+1), con m = numero delle

cifre del numero q^2; com'è noto, la frequenza f dei numeri primi per ogni potenza di 10^m è di circa 2m; ne consegue che la frequenza dei numeri primi da p^2 a q^2 è di circa 2m, e quindi, dividendo la differenza d tra i quadrati dei due numeri primi consecutivi e maggiori di 2 per la frequenza media 2m, otteniamo con ottima approssimazione il numero n dei numeri primi compresi tra i due quadrati dei numeri p e q considerati, con n sempre maggiore di 4 (il chè soddisfa la congettura iniziale di Brocard, poiché già nel caso minimo di p=3 e q= 5 ci sono , come vedremo, ben cinque numeri primi); con la nostra estensione ad n numeri primi, n è sempre crescente, direttamente proporzionale alla differenza tra i due quadrati e inversamente proporzionale alla frequenza dei numeri primi nell'intervallo tra i due quadrati.

Per un numero q^2 di tre cifre, per esempio, sappiamo che al massimo può essere 999, e quindi compreso tra 100 e 1000, cioè tra 10^2 e 10^3, con m + 1 =2 + 1 = 3; e poiché fino a 1000 ci sono circa 1000/ 2*3 = 1000/6 = 166 numeri primi (valore reale 168), per cui la frequenza f che ci interessa per q^2 di tre cifre è f = 2*3 = 6,

come vedremo in qualche esempio successivo, dopo gli esempi più semplici.

I primi due numeri primi successivi e maggiori di 2 sono 3 e 5, quindi, per la congettura di Brocard tra 3^2 = 9 e 5^2 = 25 cioè tra i numeri 25 - 9 = d = 16 ci sono almeno quattro numeri primi, che infatti sono cinque 11, 13, 17, 19 e 23 .

Con la nostra formula, poiché 5^2 = 25 è di due cifre, la frequenza è 2*2 = 4, e la differenza 16, per cui n ≈ 16/4 =4, il numero minimo di numeri primi previsto dalla congettura iniziale, in realtà i numeri primi tra 9 e 25 sono i cinque numeri primi sopra elencati.

Secondo esempio, con p = 5 e q = 7

d = q^2 – p^2 = 49 – 25 = 24, ed n ≈ 24/4 = 6; i numeri primi compresi tra 25 e 49 infatti 6: 29, 31, 37, 39, 41 e 43: la nostra formula in questo caso ha dato il valore reale.

Terzo esempio, per p = 7 e q = 11

d = 11^2 - 7^2 = 121 - 49 = 72, e n = 72/6 = 12 (poiché 121 è di 3 cifre e quindi la frequenza media è 2*3=6); ma i numeri primi compresi tra 49 e 121 sono 15, quindi n reale = 15 è

leggermente in eccesso rispetto al valore stimato n = 12.

I 15 numeri primi compresi tra 49 e 121 sono i seguenti:

53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, e 113

e la congettura iniziale (almeno quattro primi) viene ampiamente soddisfatta, come pure la nostra estensione (n = circa d/f)

E così via per tutte le altre coppie successive di primi p e q consecutivi: ultimo esempio, la coppia di gemelli p=101 e q = 103.

d =103^2 - 101^2 = 10.609 – 10.201 = 399;

f = 2*5 = 10 poiché 10.609 è di 5 cifre;

n = circa 399/10 = 39,9 = valore stimato;

n = 42 valore reale, poiché tra 10.201 e 10.609 ci sono 42 numeri primi, come si può facilmente controllare su qualsiasi tavola di numeri primi. In questo caso, n reale è leggermente in eccesso rispetto a n stimato, come spesso accade in per altre coppie, per esempio per p = 103 e q = 107, n stimato = 84, n reale = 87.

Risultati migliori si ottengono con la media delle frequenze per 10^m > q^2 e 10^(m-1) < q^2: infatti, per l'esempio p=101 e q = 103, troviamo che la frequenza media

10m +10m -1)/2 = (20m-1)/2 = (10*2-1)/2 =19/2 = 9,5,

e così ora n = 399/9,5 = 42, che è esattamente il valore reale di n, senza alcuna piccola discrepanza come nel calcolo precedente con frequenza 2m = 10, che dava n =399/10 =39,9

Concludendo, il valido ragionamento sulla frequenza media dei numeri primi compresi tra i due quadrati di due numeri primi successivi e maggiori di 2 , e il relativo calcolo di n = circa la differenza tra i due quadrati divisa per la frequenza media f uguale al doppia del numeri di cifre di q^2, e quindi n = circa d/f, supera di gran lunga il valore di almeno quattro numeri primi della congettura iniziale, ma è vicinissimo, con discrepanza di qualche sola unità rispetto al valore reale di n per tutte le infinite coppie di numeri primi consecutivi p e q, gemelli compresi (tranne la sola coppia iniziale p = 2 e q = 3 , poiché tra 9 e 4 ci sono soltanto i due numeri primi 5 e 7, e infatti tale coppia è esclusa dalla congettura iniziale). Con ciò, sia la congettura iniziale di Brocard limitata ad almeno quattro numeri primi, sia la nostra estensione (teorema Brocard – Gruppo Eratostene) a n =d/f numeri primi, con n stimato vicinissimo al valore reale n del numero dei numeri primi compresi tra i quadrati di due numeri primi consecutivi p e q maggiori di 2,

sono da ritenersi entrambe dimostrate.

Gruppo ERATOSTENE

Caltanissetta 1.10.2010 (Data di revisione)