Relazioni tra i numeri di Fibonacci, i numeri di Keith (o Repfigit) e i numeri di Keith inversi o Repfigit inversi (o revRepfigit)

Gruppo Eratostene

Introduzione

I numeri di Keith, detti anche Repfigit, e i numeri di Keith inversi, detti anche Repfigit inversi, sono connessi, come costruzione, ai numeri di Fibonacci. Vedi apposite voci su Wikipedia, e le note che l'ing Turco vi ha dedicato sul suo Block Notes Matematico (vedi link del nostro sito www.gruppoeratostene.com)

In questo lavoro parleremo sopratutto della loro distribuzione fino a 10^n, ed in particolare fino a 10^10, in base ai dati disponibili, con alcune formule empiriche di stima, rispettivamente 5n, 4n e 3n (che in seguito possibilmente trasformeremo in formule logaritmiche ed eventuali forme chiuse, oltre che a usare nuovi logaritmi ad hoc per trovare numeri di Keith e di Keith inversi con più di 34 cifre, e di dimostrare eventualmente la loro probabile infinità, gia nota per i soli numeri di Fibonacci).

Le stime empiriche di cui sopra derivano dal fatto che tutte e tre le serie di numeri sono progressioni geometriche, nelle quali il numero successivo S_{n+1} si ottiene moltiplicando il numero precedente S_n per un numero fisso, proprio di quella successione geometrica.

Per esempio, per la serie 1, 3, 9, 27, 81.. tale numero è 3, poiché 1*3 = 3, 3*3 = 9, 9*3 = 27, 27*3 = 81, e cosi via.

Per i numeri di Fibonacci tale numero, com'è noto, è il numero aureo Φ =1,618, tale che un qualsiasi numero di Fibonacci, moltiplicato per 1,618, dà il successivo, per es. **34** *1,618 = **55**,01; **55***1,618 = 88,99 ~ **89,** e così via

Da brevi calcoli, risulta che in ogni intervallo tra 10^n e 10^n+1, ci sono circa 9/1,618 = 5,5 ~ **5** numeri di Fibonacci (con lo stesso numero n di cifre), che poi si assommano ai precedenti numeri man mano che si contano fino a valori di 10^n successivi; da qui la formula empirica

$$F(10^n) \sim 5n$$

della Tabella 1.

Per i numeri di Keit, la stima del numero totale di dei numeri di Keith K(10^n) è di circa 4n poichè il rapporto tra un numero di Keith e il precedente, seppure un po' più irregolare del rapporto aureo 1, 618, è maggiore di questo, mediamente attorno a 2, e tale che in ogni intervallo tra una potenza di 10 e la successiva ci sono mediamente 9/2 = 4,5 ~ **4** numeri di Keith, come risulta dalla Tabella 2. Analogamente per i numeri di Keith inversi, ancora più rari, circa 3n, poiché il rapporto cresce ancora, a circa 2,5; e quindi anche 9/2,5 = 3,6 ~ 3, da qui la stima empirica di circa 3n per questi numeri di Keith inversi.

Rifacciamo il più facile esempio della progressione 1, 3, 9, 27, 81…delle potenze di 3. Fino a 10 ci sono 1, 3 e 9, e quindi tre numeri (solo due se si esclude per comodità l'1 iniziale); da 10 a 100 ci sono i numeri 27 e 81, e cioè altri due (circa la media 9/3 =3, in realtà ce ne sono tre solo fino a 10^1 =10, poi sempre due, come vedremo in seguito) numeri, che sommati a tre precedenti, fanno cinque numeri da 1 a 100; fino a 1000 ci sono 81*3 = 243; 243*3 = 729, e quindi altri due numeri, in totale 3+2+2= 7; fino a 10 000 ci sono 729*3= 2187 e 2187*3= 6561, ma non 6561*3 = 19683 , poiché ha cinque cifre, e appartiene all'intervallo successivo; quindi altri due numeri, 3+2+2+2 =9, e così via, con una stima ora di circa 2n, come da tabella seguente come esempio (potenze di 3) per tutte le progressioni geometriche con basso numero moltiplicativo (base delle potenze interessate):

n	10^n	S (10^n)	2n
1	10^1	3	2
2	10^2	5	4
3	10^3	7	6
4	10^4	9	8
5	10^5	11	10
…	…	…	…

Se togliamo però 3^0 = 1 dal conteggio, S(10^n) equivale sempre esattamente a 2n.

Un caso particolare sono le stesse potenze di 10, una sola ad ogni intervallo tra una potenza e l'altra, ed esattamente 10^n, e sempre all'inizio di ogni intervallo: 10, 100, 1000, 10000, ecc, in tal caso la stima è sempre esatta, e corrisponde a 1*n = n, poiché 9/10 = 0,9 ~ 1.

Anche per le progressioni di Fibonacci, Keith e Keith inversi il meccanismo è lo stesso, anche se il numero moltiplicativo di base non è intero ma decimale, e prossimo a 2, come 1,618, (il più piccolo) e gli altri due, un po' più grandi e che quindi comportano meno numeri particolari (Keith e Keith inversi) per ogni intervallo tra una potenza di 10 e la successiva. La somma di tali numeri particolari, si avvicina alla relativa stima: 5n per i numeri di Fibonacci, 4n per i numeri di Keith, 3n per i numeri di Keith inversi, 2n per le potenze di 3.

Tabella 1 dei numeri di Fibonacci fino a 10^n

n	10^n	F(10^n)	~ =	5n
1	10^1	7		5
2	10^2	12		10
3	10^3	17		15
4	10^4	21		20
5	10^5	26		25
6	10^6	31		30
7	10^7	36		35
8	10^8	**40**		**40**
9	10^9	**45**		**45**
10	10^10	**50**		**50**
…	…	…		…

Tabella 2 dei numeri di Keith fino a 10^n

n	10^n	K(10^n)	~ <	4n
1	10^1	0		4
2	10^2	6		8
3	10^3	8		12
4	10^4	17		16
5	10^5	24		20
6	10^6	34		24
7	10^7	36		28
8	10^8	39		32
9	10^9	41		36
10	10^10	41		40
…	…	…		…
10	10^19	71		76
…	…	…		…
34	10^34	113		136
…	…	…		…

Tabella 3 dei numeri di Keith inversi fino a 10^n

n	10^n	K_i (10^n) ~>	3n
1	10^1	0	3
2	10^2	6	6
3	10^3	8	9
4	10^4	11	12
5	10^5	**15**	**15**
6	10^6	17	18
7	10^7	23	21
8	10^8	27	24
9	10^9	31	27
10	10^10	36	30
…	…	…	…

La stima 3n, per quanto sopra, e valida anche per

le potenze di 2, infatti:

fino a 10 si hanno 2, 4 e 8

da 10 a 100 si hanno 16, 32 e 64

da 100 a 1000 si hanno 128, 256 e 512

da 1000 a 1000 si hanno 1024, 2048, 4096, 8192

e così via, con almeno tre valori per ogni

intervallo tra due successive potenze di 10, e con

la seguente tabella di stima totale fino a 10^n:

n	10^n	2^n valori reali	2^n stima 3n
1	10^1	3	3
2	10^2	6	6
3	10^3	9	9
4	10^4	13	12
5	10^5	15	15
6	10^3	18	18
…	…	…	…

Conclusione

Ecco così spiegato, attraverso il meccanismo delle potenze di numeri piccoli e alla loro relazione con le potenze di 10 (distribuzione di tali potenze fino a 10^n), il perché delle nostre stime empiriche per i suddetti tipi di numeri, e che successivamente trasformeremo in formule logaritmiche , per esempio $4n \sim 2*\ln(10^n)$, ecc. ed eventualmente anche in forme chiuse, con possibile dimostrazioni per la loro infinità (già certa per Fibonacci, e molto verosimilmente, sembra anche per gli altri due tipi di numeri: tutti e tre sono, come abbiamo visto, progressioni geometriche, sebbene un po' irregolari, specialmente le ultime due; ma come tutte le progressioni geometriche (o aritmetiche come i multipli di qualsiasi numero), anche queste dovrebbero essere infinite.

Fine

Nota 1

Tabella sulle possibili relazioni tra numeri di Keith e di Keith con i numeri triangolare e i numeri di Lie

Relazione tra numeri di Keith K, Keith inversi Ki e numeri Triangolari   T, analogamente ai numeri di Fibonacci

$K = T, T \pm 1, T \pm 2, T \pm 3, \dots T \pm m$ con m numero piccolo

Relazione tra Keith inversi

Ki = T, $T \pm 1$, …$T \pm m$ (idem)

Esempi, per i numeri K e Ki più piccoli (fino a

2556):

T	+- m	K	T +- m	Ki
1				
3				
6				
10			+ 2 =	12
15	- 1 =	14		
21	- 2 =	19	+ 3 =	24
28	=	**28**		
36				**36**
45	+ 2 =	47	+ 3 =	48
55			- 3 =	52
66	- 5 =	61	+ 5 =	71
78	- 3 =	75		
91				

105
120
136
153
171
190 + 7 = 197
210
…
351 - 10 = 341
….
666 + 16 = 682
741 +1 = 742
…
1128 - 24 = 1104
…
1275 +10 = 1285
1540 - 3 = 1537
…
2211 - 3 = 2208
…
2556 +24 = 2580
… … …

Relazioni con i numeri di Lie L(n) = 2T +1

2T	2T+1	+- m	=	K	2T+1	+- m	=	Ki
2	3							
6	7							
12	13	+ 1	=	14		- 1	=	12
20	21	- 2	=	19		+ 3	=	24
30	31	- 3	=	28		+ 5	=	36
42	43	+ 4	=	47		+ 5	=	48
56	57	+ 4	=	61		- 5	=	52
72	73	+ 2	=	75		- 1	=	71
90	91							
110	111							
132	133							
156	157							
182	183	+ 14	=	197				
210	211	- 14	=	197				
240	241							
272	273							
306	307							
342	343					- 1	=	341
…								
702	703					- 21	=	682
756	757	- 14	=	742				

… … … …
1122 1123 -18 = 1104
1260 1261 +24 = 1285
… … … … … …

Come si può facilmente notare, i numeri di Keith e di Keith inversi non si discostano molto dai numeri di Lie L(n) = 2T+1, analogamente ai numeri di Fibonacci, che però vi sono molto più vicini (vedi Tabelle successive), e quindi rispecchiano molto più le simmetrie naturali dei numeri di Lie. E’ possibile però, in linea teorica, che i numeri di Keith possano apparire (almeno i più piccoli) in qualche fenomeno naturale; ma finora non sono stati mai osservati, o, se si, non sono stati ancora identificati come tali.

Confronto tra gli n-esimi numeri di Keith (Repfigit) e di Keith inversi (revRepfigit) con relative differenze e rapporti

n°	Repfigit	revRepfigit	diff.~ **F(n)**	rapporto
	a	**b**	**a-b**	**a/b**
1	14	12	**2**	1,16
2	24	19	**5**	1,26
3	36	28	**8**	1,28
4	48	47	**1**	1,02
5	61	52	9	1,17
6	75	71	4	1,05
7	341	197	**144**	1,73
8	742	682	60	1,08
9	1285	1104	181	1,16
10	5532	1537	3995	3,59
11	8166	2208	5958	3,69
12	17593	2580	15013	6,81
13	22421	3684	18737	7,71
14	74733	4788	69945	15,68
…	…	…	..	…

Come si vede, le differenze e i rapporti successivi si fanno sempre più grandi al crescere di n, e solo per i primi n, si nota che le differenze sono numeri di Fibonacci (**2, 5, 8, 1, 144**) o prossimi ad essi 9 ~ **8**, 4 ~ **3**, 60 ~ **55**, o a loro medie aritmetiche 181~ (144 +233)/2 = 188,5, ma la cosa non si verifica più per n più grandi. Per cui è difficile trovare relazioni aritmetiche precise tra l'n-esimo numero di Keith e l'n-esimo numero di Keith inverso usando differenze e rapporti successivi.

Con i prodotti successivi, invece, si ottiene circa il quadrato di un numero di Fibonacci che stà a

circa metà strada tra i due numeri:

14*12 = 168 , √168 = 12,96 ~ **13**
24*19 = 456 , √456 = 21,35 ~ **21**
36*28 = 1008 , √1008 = 31,74 ~ **34**
48*47 = 2256 , √2256 = 47,49 ~ 44,5
media aritmetica (**34+55**)/2
61*52 = 3172, √3172 = 56,32 ~ **55**
…
341*197= 67177, √67177 = 259,18 ~ **233**
…

In seguito, però, la radice quadrata del prodotto si fa sempre più grande del numero di Fibonacci più vicino, per cui anche questa via è leggermente significativa solo per i primi valori di n

Per i numeri della serie di Fibonacci, riportiamo le seguenti due tabelle, che evidenziano le loro relazioni di affinità con i numeri triangolari T e i numeri di Lie (n) =2T+1, e quindi con la

simmetria (tramite i gruppi di Lie) che essi

rappresentano:

TABELLA T ± 1 , T ± 2 e i numeri di Fibonacci *F*

T-2	T-1	T	T+1	T+2
-1	0	***1***	***2***	***3***
1	***2***	***3***	4	***5***
4	***5***	**6**	7	***8***
8	9	**10**	11	12
13	14	**15**	16	17
19	20	***21***	22	23
26	27	**28**	29	30
34	35	**36**	37	38
53	54	***55***	56	57
63	65	**66**	67	68
76	77	**78**	79	80
89	90	**91**	92	93
…	…	…	…	…
229	230	**231**	***233***	234
…	…	….	…	…
376	***377***	**378**	379	380

…	…	…	…	…
1594	1595	**1596**	***1597***	1598
…	….	…	…	. . .

Come si nota facilmente, fino a T = 91,tutti i numeri di Fibonacci fino a 89 si trovano nella striscia numerica da 2T-2 e 2T+2, ma anche alcuni numeri di Fibonacci più grandi, come 377 e 1597, giacciono in questa stessa striscia numerica. Tale vicinanza di F a T non è del tutto casuale, poiché rispecchia quasi totalmente le simmetrie dei gruppi di Lie.

Ma i numeri di **Fibonacci** (qui in colore **verde**) giacciono anche ella striscia numerica da 2T -2 a T+2,come da simile tabella seguente:

2T-2	2T-1	2T	2T+1	2T+2	***2T+1* = Lie L(n)**
0	***1***	**2**	***3***	4	***3***
4	***5***	**6**	*7*	***8***	*7**2 = **14** = **G2**
10	11	**12**	***13***	14	***13*** = L(3),
18	19	**20**	***21***	22	***21*** =L(4)
28	29	**30**	**31**	32	**31***8 =**248** = **E8**
40	41	**42**	**43**	44	
54	***55***	**56**	**57**	58	
70	71	**72**	**73**	74	
88	***89***	**90**	**91**	92	
…	…	…	…	…	
130	131	**132**	**133**	134	**133***1 = **7***19 = **E7**

13*4 = **52** = F**4**,   13*6 = **78** = E**6**

Manca solo il numero di Fibonacci ***34*** = 32 + 2

e quindi fuori tabella; ma è presente nella

tabella precedente.

Infine, a cosa potessero servire i numeri di

Keith e i numeri di Keith inversi, ancora non si sa

bene (qualcuno ha pensato a statistiche sui sondaggi elettorali, ma senza risultati teorici attendibili) ma prima o poi si potrebbe scoprire una loro qualche utilità pratica, e allora queste nostre attuali considerazioni e tabelle potrebbero tornare utili. Nel frattempo, potrebbero essere utili a risolvere il difficile problema della loro infinita, e gli altri (se ci sono numeri Repfigit con più di 34 cifre, se ci sono eventuali proprietà di qualche tipo che ci permette di dire che un numero intero è un Repfigit o un revRepfigit, se esiste un modo (a parte le nostre stime empiriche di cui sopra) per contare tali numeri in un intervallo da 1 a N, come per esempio si fa con i numeri primi ($\pi(N)$), ecc. (vedi blog dell'Ing. Rosario Turco citato all'inizio, sul nostro sito)

Caltanissetta 30.4.2010