DALLE SERIE INFINITE ALLE STRINGHE ED ALLE TOE TRAMITE LE NOTE COSTANTI MATEMATICHE (π, e, Φ, √2).

F. Di Noto, M. Nardelli, A. Tulumello, G. Di Maria

Sommario

In questo lavoro vedremo come, dalle serie infinite convergenti ad un limite, si ottengono delle costanti che sono poi connesse alla distribuzione dei numeri primi e quindi alla funzione zeta di Riemann, alla RH o ipotesi RH equivalenti, (nella RH1 è coinvolta per esempio la costante ***e = 2,718***) alle teorie di stringa e ad alcuni fenomeni naturali, specie quantistici (livelli di energia degli atomi) e cosmologici (universo ciclico, ecc.), e infine anche alle TOE (Teorie del Tutto).

Introduzione

Alcune note serie numeriche, derivate dalla serie armonica, convergono ad un limite che spesso è anche una costante, per esempio e = 2,718…; altre famose costanti sono ***π,=3,14***.., ***Φ = 1,618***…, √***2 =1,4142***… connesse alla distribuzione dei numeri primi, e quindi alla funzione zeta di Riemann, ed alla relativa ipotesi di Riemann detta brevemente RH. Esse sono presenti nelle formule matematiche che esprimono le leggi fisiche di alcuni fenomeni naturali in cui è sospettata o accertata la loro influenza, per esempio nelle stringhe, ecc.

Molti fenomeni naturali infatti affonderebbero, come mostreremo in questo lavoro, le loro radici matematiche nelle serie numeriche infinite (per esempio, in primis, la stessa serie armonica, sulla quale si basa, come è noto, anche la musica), tramite la sequenza:

serie infinite → costanti matematiche → distribuzione numeri primi (TNP, funzione zeta, ipotesi di Riemann RH (o ipotesi RH equivalenti) → fenomeni naturali (specie le stringhe,i fenomeni quantistici, ecc.) teorie di stringa → TOE (vedi Nota 1 finale).

CAPITOLO 1

Premessa
Partizioni
Nuova connessione tra ***e* = 2,728, *Φ* = 1,618 ,** e ***π* = 3,14**.

Premettiamo che, come già noto:

a) la costante Φ = 1,618… è già presente, attraverso i numeri di Fibonacci, in molti fenomeni naturali basati sulle forme a spirale (es. foglie, fiori, pigne, conchiglie, galassie) ma anche orbite dei pianeti, ecc.,

b) la costante ***e* = 2,718**…, soprattutto come base logaritmica, che insieme a 10 (un’altra base logaritmica):

“…è ampiamente presente nel mondo della natura , spesso all’interno dei processi di crescita e decadimento”

(M. Watkins, in “Matematica e fisica”, Macroedizioni);

c) la costante ***π = 3,14…*** è presente, oltre che nelle formule di calcolo di numerosi solidi geometrici come sfere, coni, cilindri, ecc., anche in molte formule di fisica, come per esempio la legge di Coulomb:

$$F = \frac{Q_1 \quad Q_2}{4 \boldsymbol{\pi} \varepsilon_o r^2}$$

La legge di Biot – Savart:

$$B = \left(\frac{\mu_o}{4\boldsymbol{\pi}} \right) \frac{Q_v \quad \sin \Theta}{r^2}$$

nel moto armonico semplice:

$$T = 2\boldsymbol{\pi} \sqrt{\frac{1}{g}} = \frac{1}{f}$$

nella conducibilità di un vuoto:

$$\mu_o = 4 \boldsymbol{\pi}^{-7} \cdot 10^{-1} \cdot H_m$$

nell’equazione di Einstein:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -8 \boldsymbol{\pi G} T_{\mu\nu}$$

ed infine anche nella costante di struttura fine, che connette diverse costanti fisiche:

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar\, c\, 4\, \boldsymbol{\pi}\, \varepsilon_0}$$

(dove "e" a numeratore è ovviamente la carica elettrica dell'elettrone, da non confondere quindi con la costante ***e* = 2,718**)

Tale costante di struttura fine è sempre più importante nelle teorie di stringa, e quindi sarà fondamentale anche nelle future TOE, o Teorie del Tutto.

A queste costanti vogliamo aggiungere, per la sua presenza in natura, anche la funzione p(n), partizioni di un numero, che non ha una costante precisa e fissa, ma un numero variabile da 2 a 1 per n tendente all'infinito.
Per i primi numeri di partizioni, tale numero, che determina approssimativamente la loro crescita numerica, è 1,375 = 11/8, e molti numeri di partizioni sono multipli sia di 8 che di 11.
Com'è noto, le partizioni sono tutti i modi in cui un numero n si può scrivere come somma di numeri più piccoli, per esempio n = 5 si può scrivere in sette modi diversi, quindi diciamo che p(5) = 7

Le partizioni

> “sono numeri che spuntano nel mondo fisico quasi con la stessa frequenza dei numeri di Fibonacci. Per esempio, dedurre la densità dei livelli energetici degli atomi in certi sistemi quantistici semplici si riduce a comprendere il modo in cui cresce il numero delle partizioni”

(Marcus du Sautoy, Rif.2)

Per inciso, vogliamo qui ricordare che abbiamo scoperto come cresce il numero di partizioni p(n) al crescere di n: il rapporto tra un numero di partizioni p(n) ed il numero di partizioni precedente p(n-1) è sempre più piccolo, e tende ad 1 al crescere di n; il che significa che p(n) cresce sempre più lentamente al crescere di n:

$p(n) / (pn-1) \rightarrow 1$ per $n \rightarrow \infty$ (Rif. 3, grafici finali)

Comunque, pur non avendo la funzione p(n) una connessione diretta con le costanti oggetto di questo lavoro, vogliamo ricordarla ugualmente a causa della sua presenza in alcuni fenomeni naturali, come dice Sautoy.
Ed accenniamo anche all’andamento statistico dei livelli energetici nella fisica quantistica, che si ritrova in natura emergendo ovunque: nei nuclei pesanti, negli zeri della funzione zeta di Riemann, nel sequenziamento del DNA, nelle proprietà del vetro.

Concludiamo il capitolo con una nostra possibile connessione tra tutte e tre le costanti ***e***, $\boldsymbol{\Phi}$ e $\boldsymbol{\pi}$:

$$\frac{\sqrt{e}}{\Phi} \approx \sqrt[64]{\pi} \qquad (1)$$

Infatti, $\frac{\sqrt{2,718}}{1,618033} = \frac{1,64872}{1,618033} = 1,0189665\ldots \approx$

$\sqrt[64]{3,14159} = 1,0180472.$

Una formula ancora più precisa è:

$$\frac{\sqrt{e}}{\Phi} = \sqrt[64]{\pi} \Big/ \left(\frac{\sqrt[1024]{\pi} + \sqrt[2048]{\pi}}{2} \right) \qquad (2)$$

che fornisce come risultato 1,0181126, più vicino a 1,0180472, con una differenza di 0,0000656, cioè di soli 656 decimilionesimi (o, equivalentemente, 6 centomillesimi).

64 come radice sessantaquattresima di π è anche 8^2, con 8 numero molto importante nelle teorie di stringa (è connesso ai numeri di Grassmann per n=3, è un numero di Fibonacci, è la metà delle 16 dimensioni compattate nelle teorie di stringa, lo ritroviamo nell'equazione di Einstein prima ricordata, è connesso ai modi di vibrazione fisica delle superstringhe ecc. e ci potrebbe essere una relazione tra questa e la (2) .

Nel prossimo capitolo tratteremo le tre costanti come limiti di alcune serie infinite derivate dalla serie armonica, la quale origina direttamente la funzione zeta di Riemann tramite il prodotto di Eulero, ed è connessa alla distribuzione dei numeri primi; ed anche le tre costanti lo sono, come vedremo, sia pure meno direttamente.

Per esempio $\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{N}}$**,** per alcuni valori di N, è molto vicino a

$\log 10^{3k} \approx 10^{3k} / \pi(10^{3k})$, ecco quindi la distribuzione dei numeri primi tramite la ben nota formula logaritmica di Gauss

$$\pi(n) \approx n/\log(n).$$

Ma $\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{N}}$, per i primi valori di N (e poi anche per alcuni valori più grandi) è anche molto vicino ad alcuni numeri di Fibonacci, , e quindi anche $\boldsymbol{\Phi}$ è coinvolto nella distribuzione dei numeri primi, con una precisa relazione tra gli esponenti di 10 (e cioè quando sono di tipo $3\boldsymbol{F_i}$ con $\boldsymbol{F_i}$ numeri di Fibonacci). Tale connessione si può sintetizzare come

$\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{N}} \approx \boldsymbol{\pi}^{\boldsymbol{N}} \approx \boldsymbol{F_{i+4}}$, e dove N è intero per $\boldsymbol{e}$ ed intero o semi-intero (alternati) per $\boldsymbol{\pi}$ (sebbene con $\boldsymbol{\pi}$ si hanno risultati un po' meno precisi), come vedremo con apposite tabelle.

CAPITOLO 2

- La serie armonica e le quattro costanti ***e, Φ, π*** e √**2**
- Le loro connessioni con la distribuzione dei numeri primi

$\pi(n)$ fino a $N = 10^{3k}$, in modo particolare per 10^{3F_i} ,
quando il suo logaritmo è $\approx F_{i+4}$

La serie armonica e le quattro costanti

Prendendo tutti i numeri naturali n, e sommando tutti i loro inversi $\frac{1}{n}$ otteniamo una serie, detta serie armonica, con somma infinita:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots\ldots + \frac{1}{n} \rightarrow \infty \quad (3)$$

che, tramite alcune modifiche, diventa la madre di tutte e tre le costanti ***e***, ***Φ***, ***π*** ed anche √**2** che poi i fisici e i matematici si ritrovano nelle formule che esprimono le leggi fisiche che regolano i fenomeni naturali, soprattutto nella loro stabilità e nella loro regolarità, come per esempio ***e*** nei fenomeni di crescita e di decadimento, ***Φ*** nei fenomeni connessi a spirali, ecc; e quindi in natura e nelle leggi naturali, espresse, come sappiamo bene, con idonee formule matematiche.

Se infatti si elevano al quadrato i denominatori della serie armonica, la somma non sarà più infinita, ma tende a $\frac{1}{6}\boldsymbol{\pi}^2$:

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{n^2} = \frac{1}{6}\boldsymbol{\pi}^2 \qquad (4)$$

dalla quale si può ricavare

$$\boldsymbol{\pi}^2 = 6\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{n^2}\right) \qquad (5)$$

$$\boldsymbol{\pi} = \sqrt{6\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{n^2}\right)} \qquad (6)$$

In tal modo $\boldsymbol{\pi}$ deriva dalla serie armonica cambiando n con n^2, cioè i denominatori, i numeri naturali, con i loro quadrati. Facciamo un esempio con i primi tre termini della serie (6) :

$$\boldsymbol{\pi} = \sqrt{6\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9}\right)} = \sqrt{6(1 + 0{,}25 + 0{,}11} = \sqrt{6 \cdot 1{,}36} =$$

$\sqrt{8{,}16} = 2{,}85 < 3{,}14$. Crescendo ovviamente il numero dei termini della (6), il valore finale della somma tende a ***π = 3,14159….***

Mentre il valore di $\frac{1}{6}\boldsymbol{\pi}^2 = 1{,}643266667$ è connesso al problema di Basilea con m pari, della $\frac{1}{n^m}$, si hanno forme chiuse, mentre con m dispari no. Ma noi abbiamo risolto anche questo problema, trovando forme chiuse anche per m dispari (Rif.4).

Un altro metodo per trovare π in un modo sempre più preciso al crescere di N, si trova in Derbyshire, Rif. 5, pag.30:

" Vediamo ora un altro caso: 4/1, 8/3, 32/9, 128/45, 768/225, 4608/1575, 36861/11025, 29412/9925… Per ottenere l'N-esimo membro della successione si procede così: se N è pari, si moltiplica il membro precedente per $\frac{N}{N+1}$, se N è dispari si moltiplica il membro precedente per $\frac{N+1}{N}$. Questa successione converge a π. L'ultima frazione indicata è 2, 972154"

Per esempio: il terzo termine è 32/9 = 3,5555; se vogliamo ottenere il quarto termine dobbiamo moltiplicarlo per $\frac{N}{N+1}$ poiché 4 è pari: $3{,}5555 \times \frac{4}{5} = 3{,}5555 \times 0{,}8 = 2{,}8444 = \frac{128}{45} = \frac{32 \times 4}{9 \times 5}$; il quinto termine sarà

$$\frac{768}{225} = \frac{128 \times 6}{45 \times 5.} = 3{,}4133333 \approx \boldsymbol{3{,}14159},$$ e così via.

L'espressione (6) è la modifica (della serie armonica (3)) che tende a π ***=3,14...*** Ora vediamo come la stessa serie armonica tende all'altra importante costante ***e =2,718***…
Premessa:

“ $1, \quad \left(1+\frac{1}{2}\right)^2, \quad \left(1+\frac{1}{3}\right)^3, \quad \left(1+\frac{1}{4}\right)^4, \quad \left(1+\frac{1}{5}\right)^5$

Se svolgiamo i calcoli, si ottiene

$1, \quad 2+\frac{1}{4}, \quad 2+\frac{10}{27}, \quad 2+\frac{113}{256}, \quad 2+\frac{1526}{3125} \ldots,$

una successione che converge a 2,718281828459, si tratta di un numero importante che userò in seguito” (Rif.5, pag.216)

In base alla serie armonica modificata,,

$$\boldsymbol{e} = \lim_{n=\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad \text{come valore limite, oppure}$$

$$\boldsymbol{e} = \sum_{n=0}^{n} \frac{1}{n!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} \ldots (7)$$

connessa alla serie armonica sostituendovi $\frac{1}{n}$ con $\frac{1}{n!}$

Si ottiene in tal modo la modifica idonea per ricavare ***e***

così come, per ***π***, la modifica era da $\frac{1}{n}$ ad $\frac{1}{n^2}$,

il tutto sotto il segno di √.

La ***e*** è connessa a ***π*** tramite la formula di Eulero

$$e^{ix} = \cos(x) + i\,\mathrm{sen}(x) \qquad (8)$$

che diviene

$$e^{i\pi} + 1 = 0 \qquad (9)$$

nel caso particolare x = π (identità di Eulero).

Rimane ora la terza costante, Φ = ***1,618…***

Questa, come già noto, è data dalla formula

$$\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \mathbf{1{,}6180339887\ldots}$$

(I numeri di Fibonacci sono invece dati da :

$$F_{(n)} = \frac{\Phi^n - (1 - \Phi)^n}{\sqrt{5}} \qquad (10)$$

Oppure, per numeri n molto grandi,

$$F_{(n)} \approx \frac{\Phi^n}{\sqrt{5}} \qquad (11)$$

Ed infine, come successione, anche da

$$\Phi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1}}} \ \ldots \qquad (12)$$

Ma, relativamente alla serie armonica, Φ si ottiene con:

$$\Phi = 1 + \sum^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{F_n \cdot F_{n+1}} = \frac{1}{1\cdot1} + \frac{1}{1\cdot2} - \frac{1}{2\cdot3} + \ldots \qquad (13)$$

Ora la modifica si ottiene sostituendo $\frac{1}{n}$ con $\frac{1}{n\cdot(n+1)}$

e variando i segni - e + in base alla formula (13).

Come prodotto,

$$\boldsymbol{\Phi} = \prod_{n=1} \left(1 + \frac{(-1)^n}{F(n)^2}\right) = \left(1 + \frac{1}{1^2}\right)\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 + \frac{1}{3^2}\right)\ldots \qquad (14)$$

dove il termine $\frac{1}{n}$ è sostituito da $\frac{1}{n^2}$.

Ma anche, con le funzioni trigonometriche:

$$\boldsymbol{\Phi} = 2\cos\frac{\boldsymbol{\pi}}{5} \qquad \text{(connessione tra } \boldsymbol{\Phi} \text{ e } \boldsymbol{\pi}) \qquad (15)$$

$$\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{e}^{\text{arc sinh}(1/2)} \qquad \text{(connessione tra } \boldsymbol{\Phi} \text{ ed } \boldsymbol{e}) \qquad (16)$$

(Formule tratte dalla voce “Sezione aurea” di Wikipedia)

Ricordiamo ora anche la costante $\sqrt{\mathbf{2}} = \mathbf{1{,}4142}$…che è coinvolta anch’essa nella distribuzione dei numeri primi, poiché le radici 2^n-esime di 2 appaiono nei rapporti successivi dei valori di alcune funzioni connesse alle relative ipotesi RH equivalenti (Rif. 4). Anche questa costante $\sqrt{\mathbf{2}}$ dipende dalla serie armonica, con il termine

$\frac{1}{n}$ modificato in $\frac{1}{2^n}$:

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \ldots = 2 \quad (17)$$

(Rif. 4, pag.11) , e dalla quale si ottiene

$$\sqrt{\mathbf{2}} = \sqrt{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \ldots} = \boldsymbol{1{,}4142}\ldots \quad (18)$$

oppure $\sqrt{\mathbf{2}} = \sqrt{\Sigma \frac{1}{n^2}}$ (19)

Una successione che tende a $\sqrt{\mathbf{2}}$ è

$$\frac{1}{1} + \frac{3}{2} + \frac{7}{5} + \frac{17}{12} + \ldots = \sqrt{2} = \boldsymbol{1{,}4142}\ldots \quad (20)$$

Ancora da Derbyshire (Rif.5), pag. 30, come curiosità:

“Consideriamo questa successione di numeri: 1/1, 3/2, 7/5, 17/12, 41/29, 99/70, 239,169, 577/408, 1393/985, 3363/2378…

Ogni frazione deriva dalla precedente con una semplice regola: sommando il dividendo e il divisore per avere il nuovo divisore, sommando il dividendo e il doppio del divisore per avere un nuovo dividendo: La serie converge alla radice quadrata di 2. Il quadrato di

3363/2378, per esempio, è 11309769/5654884, che equivale a 2,000000176838287… Diciamo che il limite della successione è √2”.

Per esempio, se vogliamo trovare il termine successivo a 7/5, troviamo 7+ 5 = 12 come nuovo divisore, e poi 7 + 2 x 5 = 17 come nuovo dividendo, e quindi 17/12 e così via per i termini successivi. Qualche valore:

$17/12 = 1{,}416666 \approx \sqrt{2}$; $1{,}416666^2 = 2{,}006944444 \approx 2$

$1393/985 = 1{,}414213 \approx \sqrt{2}$; $1{,}414213^2 = 1{,}999998969 \approx 2$

$3363/2378=1{,}4142136 \approx \sqrt{2}$; $1{,}4142136^2 = 2{,}0000039 \approx 2$

Infine, vediamo brevemente come la funzione zeta (ripresa nel Capitolo 5) deriva direttamente dalla serie armonica ed è alla base dell’ipotesi di Riemann

$$\zeta(s) = \sum_{n=0} n^{-s} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} \qquad (21)$$

con s numero complesso (con numero s reale e pari abbiamo l’ex problema di Basilea)

Questa funzione è stata poi trasformata in prodotto da Eulero:

$$\zeta(s) = \prod \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} \qquad (22)$$

(ora il termine $\frac{1}{n}$ è sostituito da $\frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}$)

Tale funzione zeta è strettamente legata alla distribuzione dei numeri primi , ed alla RH:

"Se la RH è vera, tutti gli zeri non banali di tale funzione giacciono sulla retta reale $\frac{1}{2}$".

Alla funzione zeta sono connessi il Teorema dei Numeri Primi (TNP), il termine d'errore, il calcolo di π(N), ecc, come già noto, il tutto ben trattato in Derbyshire (Rif. 4).

Ora possiamo vedere come le tre costanti ***e***, ***Φ*** e ***π*** sono strettamente collegate alla distribuzione dei numeri primi fino alle potenze di 10 , tramite la relazione:

$$\boldsymbol{e^N} \approx 10^{3k} / \pi(10^{3k}) \approx \log 10^{3k} \approx F_{i+4} \qquad (23)$$

$$\text{quando } k = F_i, \text{ ed } \boldsymbol{e^N} \cdot \boldsymbol{\Phi} \approx F_{i+1} \qquad (24)$$

Cominciamo con ***e* = 2,718** e ***Φ* =1,618** insieme:

TABELLA 1 (e^N , $e^N \cdot \Phi$)

N	e^N	$\approx F_i$	$e^N \cdot \Phi$ $\approx$	F_{i+1}
1	***2,718***	***3***	***2,718 · 1,618*** = 4,39	***5***
2	7,389	***8***	… … 11,95	***13***
3	20,085	***21***	… … 32,49	***34***
4	54,598	***55***	… … 88,33	***89***
5	148,336	***144***	… … 240,00	***233***
6	403,177	***377***	… … 652,34	***610***
7	1095,837	***987***	… … 1773,06	***1597***
8	2978,486	***2584***	… … 4819,19	***4181***
…	**…**	**…**	**…** **…** **…**	**…**
13	441817	***514229***	… … 714860,66	***832040***
…	**…**	**…**	**…**	**…**

Al crescere ancora di N, e^N dà però valori sempre più lontani da F_i e da F_{i+1}, e approssimati per eccesso a partire da N = ***5*** in poi. Si nota subito, peraltro, che per i primi valori di N, e^N dà valori molto prossimi a F_i = ***3, 8, 21, 55, 144…*** mentre $e^N \cdot \Phi$ dà valori molto prossimi a F_{i+1} = ***5, 13, 34, 89, 233…*** Mettendo in un ordine unico tali numeri, si ottiene la serie completa di Fibonacci, tranne i primi termini iniziali ***0, 1, 1*** e ***2.***

Quando anche N è anch'esso un numero di Fibonacci, abbiamo la connessione tra e, Φ, F_i ed F_{i+1} :

$$e^N \approx F_i, \qquad e^N \cdot \Phi \approx F_{i+1} \qquad \text{alternati.} \tag{25}$$

Ora vediamo come questa interessante connessione riguarda la distribuzione dei numeri primi fino a potenze di 10 :

$$e^N \approx 10^{3k} / \pi(10^{3k}) \approx \log 10^{3k} \qquad (26)$$

con la seguente TABELLA 2, specialmente quando k = ***Fi***,

e per i quali $\boldsymbol{e^N \approx F_{i+4}}$. (27)

TABELLA 2

$\underline{k} = F_i$

$10^{3k=3F_i}$	$\log 10^{3k}$ ≈	$10^{3k} / \pi(10^{3k})$	≈ e^N	≈ F_{i+4}
$10^{3=3\cdot\underline{1}}$	6,90	5,95		***5***
$10^{6=3\cdot\underline{2}}$	13,81	12,73		***13***
$10^{9=3\cdot\underline{3}}$	20,72	19,66	e^3	***21***
$10^{12=3\cdot 4}$	27,63	26,59		27,5 (media ***21+34***)/2
$10^{15=3\cdot\underline{5}}$	34,53	33,50		***34***
$10^{18=3\cdot 6}$	41,44	40,42		44,5 (media ***34+55***)/2
$10^{21=3\cdot 7}$	48,35	…		44,5 (media ***34 +55***)/2
$10^{24=3\cdot 8}$	55,26	…	e^4	***55***

…	…	…		…
$10^{39=3\cdot \underline{\boldsymbol{13}}}$	89,80	…		***89***
…	…	…		…
$10^{63=3\cdot \boldsymbol{21}}$	145,06	…	$\boldsymbol{e^5}$	***144***
…	**…**	**…**	…	…

Con l'interessante relazione 3k = $3\boldsymbol{F_i}$ con $\boldsymbol{F_i} \rightarrow \boldsymbol{F_{i+4}}$.

Per esempio ad F_8 = ***13*** di $10^{\boldsymbol{3\cdot 13}}$ corrisponde $\boldsymbol{F_{8+4} = F_{12} = 89}$,

come anche da $\boldsymbol{F_9 = 21}$ si passa a $\boldsymbol{F_{13} = 144}$ ***, con*** $\boldsymbol{9 + 4 = 13}$

nella riga successiva .

Ed anche, tale connessione connette $\boldsymbol{e^N}$ a $\boldsymbol{\Phi}$, poichè

$\boldsymbol{F_{i+4} / F_i = \Phi^4}$ = 6,853, per esempio 89/13 = 6,846 ≈ 6,853.

Con la seguente tabella 3 vediamo una connessione tra il rapporto r = $\boldsymbol{F_{i+4}/3F_i}$ e √2, poiché r/$\boldsymbol{\Phi}$ tende a √2

TABELLA 3

F_{i+4} /	$3F_i$	= r	r / Φ ≈	√2
5	3	1,666	1,029	***1,4142***
13	6	2,166	1,338	“
21	9	2,333	1,997	“
27,5	12	2,291	1,4159	“
34	15	2,266	1,4004	“
55	24	2,291	1,4159	“
89	39	2,282	1,4103	“
144	63	2,285	1,4122	“
…	…	…	…	…

In tal modo le costanti ***e*** , ***Φ*** **,** √**2** sono così connesse.

CAPITOLO 3

Il numero armonico H_n, la costante π = ***3,14*** ed i numeri primi

-----

Un’ altra conseguenza della serie armonica è, com’è noto, anche il numero armonico:

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} \quad \text{(serie armonica)} \quad (28)$$

Ma anche la costante di Eulero - Mascheroni:

$$\gamma = \lim_{n=\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} - \log(n)\right) \quad (29)$$

γ = ***0,57721***…. Con la quale poi si ricava il numero

armonico

$$H_n \approx \log(n) + \gamma = \log(n) + \mathbf{0{,}57721} \qquad (30)$$

Il numero armonico non è direttamente coinvolto con i numeri primi, bensì è connesso con i fattori primi di n, specialmente se n è un fattoriale, cioè n! Questo perché H_n appare nell'equivalenza di Lagarias

$$L(n) = H_n + e^{H_n} \cdot \log(H_n) - \sigma(n) \qquad (31)$$

(dell'ipotesi equivalente RH1 = RH, Rif. 6 e 7) (32)

e dove $\sigma(n)$ è la somma dei divisori di n. Il contro esempio della RH1 è ora $L(n) \geq 0$, impossibile perché la prima parte dell'equazione (31) cresce sempre più velocemente, sia pure con piccole irregolarità, della seconda parte, σ(n), e quindi L(n) sarà sempre positiva e mai nulla, L(n) > 0, confermando l'equivalenza per ogni n; anche per n! e loro multipli, e quindi l'equivalenza di Lagarias è la realtà di RH1 = RH.

Vediamo ora la connessione tra costante ***π*** = ***3,14*** e la distribuzione dei numeri primi. Già abbiamo visto, con la (6) , come essa converge a ***π***:

$$\boldsymbol{\pi} = \sqrt{6\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{n^2}\right)}$$

Premettiamo brevemente una connessione tra ***π*** e ***Φ,*** con la relazioni

$$\boldsymbol{\pi}^{N} = \boldsymbol{F_i} \qquad\qquad \boldsymbol{\pi}^{N,5} = \boldsymbol{F_i}$$

e come da seguente tabella

TABELLA 4

N; n,5	π^N	$\pi^{N,5}$	≈	***Fi***
1	3,14			***3***
1,5		5,56		***5***
2	9,85			***8***
2,5		17,47		***21***
3	30,95			***34***
3,5		54,85		***55***
4	97,21			***89***
4,5		172,25		116,5 ≈ (***89 +144***)/2
5	305,24			***377***
5,5		540,89		493,5 ≈ (***377+610***)/2
6	958,46			***987***
…	…	…		…

Tale relazione,e relativi calcoli, sono validi però per i primi numeri di Fibonacci poiché dopo ***55*** diventa sempre meno coerente. Manca il numero ***13*** tra ***8*** e ***21,*** che però

si può inserire calcolando $\boldsymbol{\pi^{2,25}}$ = 13,12 ≈ ***13*** ,

mentre per ***144*** si calcola $\boldsymbol{\pi^{4,25}}$ = 129,40 ≈ ***144 ,***

e per ***233*** si calcola $\boldsymbol{\pi^{4,75}}$ = 229.30 ≈ ***233*** ora ovviamente i rapporti tra due valori successivi della tabella non sono più uguali a circa 1,618, ma a 3,14 = $\boldsymbol{\pi}$:

per esempio $\pi^4 / \pi^3 = 97{,}21/30{,}95 = 3{,}1408 \approx$ ***3,14159***

Vediamo ora le connessioni tra $\boldsymbol{\pi}$ e la distribuzione dei numeri primi, e soprattutto con gli zeri della funzione zeta: a) la prima connessione è la seguente (Derbyshire, rif. 5, pag.232:

" Esiste infatti una regola per la spaziatura media degli zeri ad altezza T nella striscia critica. E'

$$\approx \quad 2\boldsymbol{\pi} / \log(T/2\boldsymbol{\pi})$$

Se T = 20, la formula si risolve a 5,4265725… se T = 100, la formula dà 2,270516724…. Potete vedere che la regola non è molto precisa, anche se, come dice il simbolo tilde, funziona meglio per numeri maggiori.

Andrew Odlyzko ha pubblicato un elenco di 10 000 zeri nelle vicinanze di 1/2 + 1370919909931995308897i. In quell'intorno, 2 $\boldsymbol{\pi}$ /log (T/2$\boldsymbol{\pi}$) vale circa 0,13416467. La media reale è 0,13417894… . Non male"

b) l'altra connessione la troviamo a pag. 361:

" La figura 21.7 fornisce l'idea generale e mostra Li ($10^{\text{retta critica}}$),

Li($100^{\text{retta critica}}$) e Li ($1000^{\text{retta critica}}$). In tutti e tre i casi ho considerato lo stesso segmento della retta critica, quello che va da 1/2 -5i a 1/2 + 5i. Notate cosa succede quando x varia da 10, a 100, a 1000.

- le spirali diventano più grandi. Convergono però sempre agli stessi due punti, - $\boldsymbol{\pi}$i e $\boldsymbol{\pi}$i.
- Il segmento della retta critica che stiamo considerando, di lunghezza 10 unità, si allunga sempre più e si avvolge ripetutamente intorno ai punti finali – $\boldsymbol{\pi}$i e $\boldsymbol{\pi}$i. "

Per la figura e le altre considerazioni sull'argomento si rimanda al libro, cap. 21 "Il termine d'errore". Ed anche a tutto il libro per quanto riguarda l'argomento inerente la funzione zeta e l'ipotesi di Riemann "tutti gli zeri non banali della funzione zeta hanno parte reale 1/2" come sintetizza lo stesso Derbyshire.

CAPITOLO 5

La funzione zeta, l'ipotesi di Riemann , i gruppi di Lie e le teorie di stringa.

Questa funzione che, ricordiamo, è basata direttamente sulla serie armonica, ed anche l'ipotesi di Riemann che ne deriva, sono connesse alle teorie di stringa, anche in relazione alla musica (basata sulla serie armonica, tramite le vibrazioni di uno strumento, per esempio le corde di un violino, a certe frequenze ; anche le stringhe vibrano a certe frequenze, creando particelle diverse per frequenze diverse, vedi Rif. 8. e 9.),

Ricordiamo anche che ormai centinaia di teoremi in fisica ed in matematica cominciano con "se la RH è vera, allora…". Con la funzione zeta, i numeri primi entrano nella fisica; ma anche, tramite i gruppi sporadici di Lie, i cui ordini hanno per fattori primi i numeri primi di Chen, detti anche supersingolari: 15 numeri primi di Chen come fattori dell'ordine del cosiddetto Monster Group, il "mostro" matematico. Vedi Rif. 10. e 11. Inoltre, poiché tali gruppi sporadici sono gruppi di simmetria, sono connessi alle permutazioni e quindi ad n!, ma anche ai numeri di Fibonacci ***Fi*** , e quindi anche alla costante $\boldsymbol{\Phi}$ **=**

1,618…, presente anche in molti altri fenomeni naturali. La relazione da noi trovata tra l'ordine dei gruppi sporadici L_m ed i numeri di Fibonacci è la seguente.

$$L_m = k\,n! + k\,\boldsymbol{F} \qquad (33)$$

con ***F*** numeri di Fibonacci. Per esempio, per il gruppo L_8 = 248, abbiamo:

$$248 = 2 \times 120 + \boldsymbol{8} = 2 \times 5! + \boldsymbol{8}$$
$$248 = 10 \times 24 + \boldsymbol{8} = 10 \times 4! + \boldsymbol{8}$$

Poiché i fattoriali sono connessi alla costante ***e =2,718***… con la serie convergente a tale costante (7) ed i numeri di Fibonacci sono connessi alla costante ***Φ = 1,618…***

tramite le formule (23), (24) e (25): $\boldsymbol{e}^N \approx \boldsymbol{F_i}$, ecc…, ecco che anche i gruppi di Lie, coinvolti nelle teorie di stringa e nel Modello standard, si portano dietro le due suddette costanti, insieme a tutte le loro connessioni con i numeri primi e la loro distribuzione. Infine il tutto passerà nelle future TOE, come per esempio il Gruppo E_8
(vedi successiva conclusione)

CONCLUSIONE

Dalla semplice serie di numeri naturali 1, 2, 3, 4, ...n, dalla loro inversione $1, \frac{1}{2} \; \frac{1}{3} \; \frac{1}{4} \ldots \frac{1}{n}$, e dalla

somma degli inversi (nota come serie armonica) e sue varianti con i loro limiti, siamo arrivati alle note costanti ***Φ =1,618…, e = 2,718…*** e

π =3,14… ma anche a ***√2 =1,4142…*** , alla funzione zeta ed alle loro connessioni con la distribuzione dei numeri primi, alle loro connessioni con i fenomeni naturali, per esempio ***π*** è presente nella formula della costante di struttura fine, ecc. Nelle teorie di stringa sono presenti sia la funzione zeta (derivata dalla serie armonica e basata sugli inversi dei numeri primi elevati ad un numero s complesso) sia i gruppi sporadici di Lie, anch'essi connessi con i numeri primi particolari (di Chen e supersingolari), sia i numeri di Fibonacci (e quindi ***Φ=1,618***) sia i numeri fattoriali (e quindi ***e=2,718) ,*** ecc. Tutto ciò passerà in futuro nelle TOE, specie quelle basate sulle teorie di stringa (le TOE alternative si basano invece sulla gravità a loop).

In questo lavoro abbiamo quindi riassunto il lungo percorso dei numeri primi dalla serie armonica (numeri naturali) alle TOE, passando per le costanti matematiche ***Φ*** , ***e*** e ***π***, (molto importanti nella distribuzione dei numeri primi) e per la funzione zeta (anch'essa, com'è noto, parte dalla serie armonica) sulla quale si basa l'ipotesi di Riemannn, fino alle teorie di stringa, base a loro volta delle future TOE. Abbiamo anche accennato al coinvolgimento delle costanti (più la funzione p(n), partizioni di un numero) in vari fenomeni naturali, per evidenziare come le leggi fisiche sono profondamente connesse con la teoria dei numeri in generale e dei numeri primi in particolare, il che spiega in parte perché le leggi fisiche sono facilmente esprimibili con formule matematiche, nelle quali figurano spesso le costanti matematiche oggetto di questo lavoro. Tutto ciò conferma il motto filosofico della Scuola pitagorica "Tutto è numero", ed anche il motivo per cui la matematica (il guanto) è così sempre più efficace nella descrizione della Natura (la mano).Per la sintesi schematica di tale percorso, vedi Nota 1 finale.

Un esempio di TOE è quella di Garrett Lisi (Rif.12), nella quale compaiono le tre costanti matematiche in diverse formule, ed anche l'importantissimo gruppo di Lie E8; e della quale riportiamo brevemente l'Abstract per chi fosse interessato a studiarla in modo più approfondito:

Abstract

"All fields of the standard model and gravity are unified as an E8 principal bundle connection. A non-compact real form of the E**8** Lie algebra has G2 and F**4** subalgebras which break down to strong su(3), electroweak su(2) x u(1), gravitational so(3,1) , the frame –Higgs, and three generations of fermions related by triality. The interactions and dynamic of these 1 –form and Grassmann valued parts of an **E8** superconnection are described by the curvature and action over a four dimensional base manifold"

NOTA 1 Percorso schematico "*Numeri* → ***TOE***"

Ipot. RH ← Ipotesi di Riemann → ***Teorie di stringa*** → ***TOE***
equivalenti ↑ ↑
Funzione zeta ↑ (di Chen , Lie)

↑ ↑
Numeri - ***inversi*** – ***serie*** - ***sue varianti*** - ***costanti*** - ***numeri primi***
naturali armonica ***matematiche*** normali
↓ ↓
fenomeni distribuzione
naturali dei numeri primi
(π(N) per N =10^3***Fi***)

NOTA 2

Da "Le Scienze" marzo 2009, rubrica "Menti Matematiche" (L'Autore non è indicato)

"… In altre parole, capiremo se è possibile descrivere la realtà che ci circonda solo con una serie di equazioni matematiche, o, se preferite, con una serie di rapporti tra numeri.
… Parte da lontano la tensione umana di descrivere la realtà con rapporti tra numeri che rendano conto dell'armonia del mondo. Come ricorda Wilczek in apertura (Quarto DVD di "Menti Matematiche, n.d.A.A.), intorno al 600 a.C. furono Pitagora e i suoi seguaci a sentenziare : "Tutto è numero". Una visione che per ironia della sorte proprio gli stessi pitagorici minarono alle fondamenta con la scoperta della radice quadrata di due, un numero irrazionale. Fu Keplero, a cavallo tra il XVI e il XVII secolo, a recuperare, dall'oblio in cui era caduta, la visione di un mondo armonico, proprio a causa dei numeri irrazionali, che come tali sono composti da un numero infinito di cifre e dunque non si accordano alla creazione di

rapporti armonici: Spiega Wilczek, in una lezione rigorosa dal punto di vista scientifico, ma assolutamente godibile nello stile e nel contenuto, che grazie allo studio delle orbite dei pianeti dell'astronomo e matematico tedesco Keplero, quel campo di sapere che in seguito sarebbe diventato "scienza", aveva ritrovato la visione pitagorica del mondo in sostanza numeri, strutture e armonia. Una visione che però con la pubblicazione delle opere di Isaac Newton verso la fine del XVII secolo tornava nuovamente in secondo piano, visto che le equazioni elaborate dal genio inglese non davano alcun indizio di un mondo regolato da una struttura numerica e concettuale. Verso la fine del XIX secolo la scoperta delle equazioni di Maxwell, che descrivono i fenomeni elettromagnetici, sembrava ribadire la concezione del mondo teorizzata da Newton: ma di lì a poco le cose sarebbero cambiate radicalmente. E' stato l'arrivo della meccanica quantistica a riportare strutture numeriche e concettuali nelle formule degli scienziati: emblematicamente è la descrizione dell'atomo operata nel 1913 da Niels Bohr. Da quel momento lo studio del mondo infinitamente piccolo, in particolare l'elettrodinamica quantistica(QED) e la cromodinamica quantistica (QCD) ed il modello standard hanno rispolverato la visione pitagorica del mondo. A LHC – per Wilczek "un monumento contro la superstizione" – l'ultima sentenza"

Commento: è proprio quello che anche noi affermiamo nel presente lavoro: da Pitagora alle stringhe e alle future TOE, il lungo percorso dei numeri come tessuto connettivo tra numeri e fenomeni naturali, percorso definibile in altre parole come connessione tra Teoria dei numeri e Fisica moderna, ed identificabile con il percorso:

Numeri→serie armonica→serie convergenti→limiti come costanti matematiche→costanti fisiche→fenomeni naturali
Definito dettagliatamente nella Nota 1.

NOTA 3

Per quanto riguarda le pagine 6 e 26, è possibile connettere i numeri 8 e 64 anche alle seguenti considerazioni inerenti le funzioni modulari di Ramanujan applicate alla teoria delle stringhe ed il modello Palumbo-Nardelli che connette le stringhe bosoniche con le superstringhe.
Il numero 8, e quindi i numeri 64 = 8^2 e 32 = 2^2 x 8, sono connessi con i modi che corrispondono alle vibrazioni fisiche di una superstringa dalla seguente funzione di Ramanujan:

$$8 = \frac{1}{3} \frac{4\left[anti\log \frac{\int_0^\infty \frac{\cos \pi txw'}{\cosh \pi x} e^{-\pi x^2 w'} dx}{e^{-\frac{\pi t^2}{4} w'} \phi_{w'}(itw')} \right] \cdot \frac{\sqrt{142}}{t^2 w'}}{\log\left[\sqrt{\left(\frac{10 + 11\sqrt{2}}{4} \right)} + \sqrt{\left(\frac{10 + 7\sqrt{2}}{4} \right)} \right]} . \quad \text{(a)}$$

Inoltre, per quanto riguarda il numero 24 ed i numeri 12 e 32 (12 = 24 / 2 e 32 = 24 + 8) essi sono connessi alle vibrazioni fisiche delle stringhe bosoniche dall’ulteriore funzione di Ramanujan :

$$24 = \frac{4\left[anti\log \frac{\int_0^\infty \frac{\cos \pi txw'}{\cosh \pi x} e^{-\pi x^2 w'} dx}{e^{-\frac{\pi t^2}{4} w'} \phi_{w'}(itw')} \right] \cdot \frac{\sqrt{142}}{t^2 w'}}{\log\left[\sqrt{\left(\frac{10 + 11\sqrt{2}}{4} \right)} + \sqrt{\left(\frac{10 + 7\sqrt{2}}{4} \right)} \right]} . \quad \text{(b)}$$

Infine i numeri 8 e 24 sono anche collegati all’equazione del modello Palumbo-Nardelli che mette in corrispondenza biunivoca l’azione di stringa bosonica con l’azione delle superstringhe:

$$-\int d^{26}x\sqrt{g}\left[-\frac{R}{16\pi G}-\frac{1}{8}g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}Tr\left(G_{\mu\nu}G_{\rho\sigma}\right)f(\phi)-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_{\mu}\phi\partial_{\nu}\phi\right]=$$
$$=\int_0^\infty\frac{1}{2\kappa_{10}^2}\int d^{10}x(-G)^{1/2}e^{-2\Phi}\left[R+4\partial_\mu\Phi\partial^\mu\Phi-\frac{1}{2}\left|\tilde{H}_3\right|^2-\frac{\kappa_{10}^2}{g_{10}^2}Tr_\nu\left(\left|F_2\right|^2\right)\right]. \qquad \text{(c)}$$

Avremo quindi le seguenti connessioni:

$$-\int d^{26}x\sqrt{g}\left[-\frac{R}{16\pi G}-\frac{1}{8}g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}Tr\left(G_{\mu\nu}G_{\rho\sigma}\right)f(\phi)-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_{\mu}\phi\partial_{\nu}\phi\right]=$$
$$=\int_0^\infty\frac{1}{2\kappa_{10}^2}\int d^{10}x(-G)^{1/2}e^{-2\Phi}\left[R+4\partial_\mu\Phi\partial^\mu\Phi-\frac{1}{2}\left|\tilde{H}_3\right|^2-\frac{\kappa_{10}^2}{g_{10}^2}Tr_\nu\left(\left|F_2\right|^2\right)\right]\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 8=\frac{1}{3}\frac{4\left[anti\log\frac{\int_0^\infty\frac{\cos\pi txw'}{\cosh\pi x}e^{-\pi x^2w'}dx}{e^{-\frac{\pi t^2}{4}w'}\phi_{w'}(itw')}\right]\cdot\frac{\sqrt{142}}{t^2w'}}{\log\left[\sqrt{\left(\frac{10+11\sqrt{2}}{4}\right)}+\sqrt{\left(\frac{10+7\sqrt{2}}{4}\right)}\right]}. \qquad \text{(d)}$$

Riferimenti

1. Mattew Watkins, “Matematica e fisica”, Macroedizioni

2. Marcus du Sautoy, “L’enigma dei numeri primi” Rizzoli, pag. 261

3. Lange Christian, Nardelli, Michele e Bini Giuseppe (2008) “Sistema musicale aureo Phi^(n/7) e connessioni matematiche tra Numeri Primi e “Paesaggio” della

Teoria delle stringhe", Dip. Sc. Terra – Dip. Matem- Unina (e quindi con connessione tra musica e stringhe, tra serie armonica e ***Φ =1,618,*** n.d.A.A.) data base Solar CNR

4."Sulle spalle dei giganti" Rosario Turco – Gruppo Eratostene, già sui nostri siti in versione italiana ed inglese.

5. John Derbyshire "L'ossessione dei numeri primi", Bollati Boringhieri, pag. 30.

6. Francesco Di Noto e Michele Nardelli,"Proposta di dimostrazione della variante di Lagarias (RH1) equivalente all'ipotesi di Riemann RH con RH1 = RH" sul nostro sito http://xoomer.alice.it/stringtheory e sul data base Solar del CNR

7. Francesco Di Noto e Michele Nardelli "L'equivalenza di Lagarias RH1 = RH esaminata con i soli numeri fattoriali n = ! e nuova proposta di soluzione per la congettura di Goldbach", idem.

8. Nardelli, M e Di Noto, F e Tulumello, A. (2006) "Fibonacci, Primi e teoria di stringa", idem.

9. Lange, Christian… (vedi Rif. 3.)

10. Di Noto, Francesco e Nardelli, Michele (2009) "Dalle stringhe alle Toe attraverso la teoria dei numeri" idem.

11. Di Noto, Francesco e Nardelli, Michele (2009) Dai numeri primi alle teorie di stringa" (Un ponte tra numeri e fisica, tramite i Numeri primi supersingolari e di Fibonacci", idem.

12. A. Garrett Lisi, "An Exceptional Simple Theory of Everything", reperibile sul web con arXiv: 0711.0770 v1 [hep.th] 6Nov 2007