

Block Notes Matematico

Appunti di Matematica ricreativa Il problema di Collatz

ing. Rosario Turco

Sommario

L'articolo riassume delle brevi osservazioni, finalizzate al problema di Collatz e frutto di spunti provenienti dall'algoritmo del contadino russo.

Nell'articolo si mostra il comportamento di un nuovo algoritmo dell'autore, chiamato ACT, che potrebbe portare a maggiori comprensioni sul problema di Collatz. L'algoritmo ACT, difatti, permette spunti e riflessioni, dove l'autore evidenzia come il comportamento anomalo dei numeri *glide complex* (vedi [4]) dipende dalle *componenti turbative*.

Il breve lavoro è, quindi, soprattutto un sasso lanciato nello stagno; in attesa di considerazioni, osservazioni sperimentali e commenti ben accetti da parte dei lettori.

Email

mailto:rosario_turco@virgilio.it



INDICE

| | |
|-------------------------------------|---|
| Algoritmo del contadino russo | 2 |
| I numeri di Hailstone..... | 2 |
| L'algoritmo ACT | 3 |
| Riferimenti | 6 |
| Siti | 6 |
| Blog..... | 6 |

Algoritmo del contadino russo

L'algoritmo del contadino russo (ACR) consente di moltiplicare due numeri N ed M interi in modo molto semplice, come somme e raddoppi; tale algoritmo in un'epoca in cui si usava il pallottoliere (limitato nei calcoli) costituiva un vantaggio grazie alla semplificazione dei calcoli.

Assegnati due numeri N ed M interi, per trovare il risultato $Tot = N * M$, l'algoritmo ACR prosegue nel seguente modo:

1. Verifica chi tra N e M è il minimo e assegna a Min un numero, ad esempio N, mentre l'altro numero viene assegnato a P (ad esempio M), mentre $R=0$
2. Calcola Tot nel seguente modo:
 - a. Se Min è dispari, pone $Min = Min - 1$ e $Tot = Min * P + R$, dove $R = P + R$
 - b. Se Min è pari, pone $Min = Min/2$ e $Tot = Min * P$ e pone $P=2*M$ mentre R rimane uguale
 - c. Se Min è diverso da 1 si ritorna ad a o b
 - d. Se $Min=1$ si arresta l'ACR ed il risultato è dato da $Tot = P + R$

Esempio

$$N=9 \quad M=23 \quad Tot=N*M=9*23$$

$$Min=9, \quad P=23, \quad R=0$$

| | |
|-----------|--------------------------------|
| 9 dispari | → $8*23+23$ Min=8, P=23, R=23 |
| 8 pari | → $4*46+23$ Min=4, P=46, R=23 |
| 4 pari | → $2*92+23$ Min=2, P=92 R=23 |
| 2 pari | → $1*184+23$ Min=1, P=184 R=23 |

$$Tot=P+R=184+23=207$$

I numeri di Hailstone

L'algoritmo del contadino russo ci dà uno spunto per generare algoritmicamente l'equivalente numero di Hailstone di un numero dato N, come somma di potenze di 2 (Vedi [4]).

Ipotizziamo che abbiamo $N * M$ dove N è il numero noto ed M è una costante ed usiamo l'algoritmo ACR.

Esempio:

$$41*M$$

| | |
|------------|---------------------|
| 41 dispari | → $40*M+M$ |
| 40 pari | → $20*2M+M$ |
| 20 pari | → $10*2^2M+M$ |
| 10 pari | → $5*2^3M+M$ |
| 5 dispari | → $4*(2^3M)+M+2^3M$ |
| 4 pari | → $2*(2^4M)+M+2^3M$ |
| 2 pari | → $1*(2^5M)+M+2^3M$ |

Per cui $41 * M = M(2^5 + 2^3 + 1)$ ovvero $41 = 2^5 + 2^3 + 1$

L'esempio di sopra mostra che possiamo facilmente ottenere una *rappresentazione di Hailstone* di un numero N con l'algoritmo del contadino russo. La cosa interessante è che l'algoritmo russo si arresta quando N, per successiva divisione, è arrivato ad 1.

In sostanza l'algoritmo del contadino russo consente di lavorare con le potenze di 2.

Quesito: Dato un numero N, in quanti passi si ottiene la rappresentazione di Hailstone con l'algoritmo del contadino russo?

Se indichiamo con N_a il numero di addendi nel numero di Hailstone, con E_{pmax} l'esponente della massima potenza di 2 e con N_p il numero di passi che servono nell'algoritmo del contadino russo per ottenere il numero di Hailstone allora è:

$$N_p = (N_a - 1) + E_{pmax}$$

L'equivalente di questo procedimento è l'algoritmo $f2k(N)$, presente anche nel software dedicato al problema di Collatz (libreria libThN.txt) e scaricabile dal sito www.gruppoeratostene.com (vedi [4]).

L'algoritmo ACT

In [4] il problema di Collatz è stato abbondantemente trattato, sia in chiave classica che moderna e nei riferimenti ci sono ulteriori contributi di altri studiosi importanti.

Il problema di Collatz è affrontabile anche in altre chiavi matematiche: reticoli, automi cellulari, Teoria dei gruppi e contributi anche in tal senso sono presenti sul blog citato nei riferimenti.

Nel seguito affronteremo il problema ancora in chiave classica, sfruttando almeno due osservazioni:

- L'algoritmo ACR che qui modificheremo in altra versione (chiamata ACT), sommando 1
- Il fatto che se un numero N lo trasformiamo in $3N+1$ è lo stesso di dire che $3N+1 = (N+1) + 2N$

ACT versione a

In base a questi semplici strumenti, i numeri interi con cui ci troveremo a lavorare nell'algoritmo successivo saranno somma di due componenti che chiameremo al momento 'componente normale' e 'componente turbativa'. La 'componente turbativa' è costituita da numeri dispari che riportano come in un loop ad un numero precedentemente trovato.

L'algoritmo al momento lo chiameremo ACT (Algoritmo per componenti turbative numeriche) e funziona in questo modo:

- a. Si pone $A = N$, $B=0$; dove A è la 'componente normale' e B la 'componente turbativa'
- b. Se A è dispari, si pone $B=2^{\circ} A$ e $A=A+1$
- c. Se A è pari e non posto già in forma $A + B$, si pone $A = A/2$;
- d. Se A è pari e posto già in forma $A + B$, si pone $A = A/2$ e $B = B/2$; si osserva poi che $B/2$ porta ad un numero precedente e si scarta dal prosieguo se dispari;
- e. Se $A=1$ si arresta il procedimento.

In [4] si è visto che alcuni numeri sono difficilmente prevedibili come path nel problema di Collatz, tuttavia trascurando la 'componente turbativa' dei numeri, si osserva che l'algoritmo ACT si arresta sempre ad 1.

Esempio

$41 \rightarrow 42+82 \rightarrow 21+41 \rightarrow 22+42 \rightarrow 11+21 \rightarrow 12+22 \rightarrow 6+11 \rightarrow 3 \rightarrow 4+6 \rightarrow 2+3 \rightarrow 1$.

In rosso sono tracciati i numeri di 'componente turbativa' scartati dal prosieguo.

ACT versione b

Nell' "ACT - versione a" non è evidente un rapido match con la formula $3x+1$ classica, per cui si può in alternativa considerare l' "ACT - versione b" che funziona secondo l' algoritmo che segue, scritto in PARI/GP:

```
{GSum(n) = listCollatzSum(n);}

{listCollatzSum(n) = local (j, k, f, s="");
if( n<2 , error("listCollatzSum(n): You must insert an integer n>1"));
f=0;
A=n;
a=n;
b=0;
j=0;
while( n>1,
  f=0;
  if( n%2 != 0 & f==0, a=n+1; b=2*n; f=1;);
  if( n%2 ==0 & a%2 == 0 & f==0, a=a/2; b=b/2; f=1;);
  if( n%2 ==0 & a%2 != 0 & f==0, a=n/2; b=0; f=1;);
  n=a+b;
  j++;
  if( n>1, print1(n,"=",a,"+",b," "));
  if( n==1, print1(n,"=",a,"+",b));
);
print1("\nG(N)=",j);
}
```

Ad esempio per $n=41$ si ottiene:

? GSum(41)

124=42+82 62=21+41 31=31+0 94=32+62 47=16+31 142=48+94 71=24+47 214=72+142 107=36+71
322=108+214 161=54+107 484=162+322 242=81+161 121=121+0 364=122+242 182=61+121 91=91+0
274=92+182 137=46+91 412=138+274 206=69+137 103=103+0 310=104+206 155=52+103 466=156+310
233=78+155 700=234+466 350=117+233 175=175+0 526=176+350 263=88+175 790=264+526 395=132+263
1186=396+790 593=198+395 1780=594+1186 890=297+593 445=445+0 1336=446+890 668=223+445
334=334+0 167=167+0 502=168+334 251=84+167 754=252+502 377=126+251 1132=378+754 566=189+377
283=283+0 850=284+566 425=142+283 1276=426+850 638=213+425 319=319+0 958=320+638 479=160+319
1438=480+958 719=240+479 2158=720+1438 1079=360+719 3238=1080+2158 1619=540+1079
4858=1620+3238 2429=810+1619 7288=2430+4858 3644=1215+2429 1822=1822+0 911=911+0 2734=912+1822
1367=456+911 4102=1368+2734 2051=684+1367 6154=2052+4102 3077=1026+2051 9232=3078+6154
4616=1539+3077 2308=2308+0 1154=1154+0 577=577+0 1732=578+1154 866=289+577 433=433+0
1300=434+866 650=217+433 325=325+0 976=326+650 488=163+325 244=244+0 122=122+0 61=61+0
184=62+122 92=31+61 46=46+0 23=23+0 70=24+46 35=12+23 106=36+70 53=18+35 160=54+106 80=27+53
40=40+0 20=20+0 10=10+0 5=5+0 16=6+10 8=3+5 4=4+0 2=2+0 1=1+0

G(N)=109

Il numero 41 ha una glide che si completa in 109 passi!

Osservazioni sull' algoritmo ACT versione b

Nell' algoritmo il valore n è stato scomposto nella somma $n=a+b$.

Se n è pari, lo è per somma di termini concordi (tutti pari o tutti dispari):

1. somma di pari
2. somma di dispari.

Se n è dispari, lo è per somma di termini discordi (pari e dispari).

Nel caso 1 esistono entrambi le componenti a e b , entrambi come pari (vedi $124=42+82$); nel caso 2 esiste solo la variabile a , come $a = n/2$ (vedi $31=31+0$), dove n è il valore precedente.

Per il caso 2:

- con n pari osservare gli esempi $62=21+41 \rightarrow 31=31+0$. Qui è spontaneo dire che se n è pari e le componenti a e b sono entrambi dispari si ottiene come risultato successivo un n costituito da un solo dispari che è la media aritmetica di a e b precedenti.
- Se n è dispari, la somma è dovuta a due componenti discordi (pari e dispari) per cui il nuovo valore è ottenibile con $a = a \text{ precedente} + 1$, $b = 2 \text{ volte } a \text{ precedente}$ ed $n=a+b$.

Comportamento dei numeri glide complex

Con l'algoritmo ACT versione b è possibile studiare meglio il comportamento dei numeri glide complex (vedi [4]), come il numero 41.

Ogni elemento, dell'esempio precedente, è da considerarsi come una tripletta, costituita da n (elemento somma di a e b), a e b; per cui è possibile analizzare la cosa con tre vettori di uguale lunghezza S(k), che costituisce l'elemento somma, A(k) e B(k), dove k è l'indice. Il k finale sarà anche la lunghezza della glide. Ovviamente i tre vettori hanno la stessa lunghezza.

A cosa serve?

Lo analizziamo per vedere se ci fornisce indicazioni per:

- capire il comportamento anomalo dei numeri glide complex
- individuare eventuali schemi o regole su uno degli elementi S, A o B
- trovare una formula per la glide, attraverso uno degli elementi
- comprendere se esiste sempre la convergenza

Sfruttiamo l'esempio del 41 glide complex di sopra e riempiamo parte della tabellina di sotto.

| k | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
|---|----|-----|----|----|----|----|-----|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|----|-----|
| S | 41 | 124 | 62 | 31 | 94 | 47 | 142 | 71 | 214 | 107 | 322 | 161 | 484 | 242 | 121 | 364 | 182 | 91 | 274 |
| A | 41 | 42 | 21 | 31 | 32 | 16 | 48 | 24 | 72 | 36 | 108 | 54 | 162 | 81 | 121 | 122 | 61 | 91 | 92 |
| B | 0 | 82 | 41 | 0 | 62 | 31 | 94 | 47 | 142 | 71 | 214 | 107 | 322 | 161 | 0 | 242 | 121 | 0 | 182 |

| k | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 |
|---|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|------|-----|------|-----|
| S | 137 | 412 | 206 | 103 | 310 | 155 | 466 | 233 | 700 | 350 | 175 | 526 | 263 | 790 | 395 | 1186 | 593 | 1780 | 890 |
| A | 46 | 138 | 69 | 103 | 104 | 52 | 156 | 78 | 234 | 117 | 175 | 176 | 88 | 264 | 132 | 396 | 198 | 594 | 297 |
| B | 91 | 274 | 137 | 0 | 206 | 103 | 310 | 155 | 466 | 233 | 0 | 350 | 175 | 526 | 263 | 790 | 395 | 1186 | 593 |

Sopra abbiamo riportato la tabellina solo per $k=0, \dots, 37$ e da essa già si osserva la presenza di uno schema:

- B(k) è la *componente turbativa*, ovvero ripete numeri dispari assunti precedentemente da S
- per S(k) dispari con A(k) pari e B(k) dispari (es. $47=16+31$ cioè $k=5$) oppure S(k) dispari e A(k) = S(k) con B(k)=0 ci sono delle diagonali in rosso, dall'alto a sinistra verso il basso a destra e con ugual numeri, tali che $S(k) = B(k+2)$ e $A(k+1) = S(k)+1$
- per S(k) pari con A(k) dispari e B(k) dispari (es. $62=21+41$ cioè $k=2$) si osservano le diagonali celesti, dall'alto a sinistra verso il basso a destra e con ugual numeri, tali che $B(k+2) = S(k)$ e $A(k+1) = S(k)/2$
- per S(k) pari con A(k) pari e B(k) pari (es. $94=32+62$ cioè $k=4$) si osservano ancora diagonali celesti dove $B(k+2) = S(k)$, mentre su A(k+1) non sempre riusciamo a pronunciarsi.

Per cui al momento abbiamo smarcato solo i punti a) e b).

I punti c) e d) sono di difficoltà maggiori. Qualche idea per i punti c) e d)?

Lo zero conviene porlo ad a o a b? Per questo punto dalla tabella emerge che sempre è $a < b$, per cui sembrerebbe più giusto porre $A(k) = 0$ e $S(k) = B(k)$, ma questo non rispetterebbe la regola sulla diagonale vista prima; ma al momento anche questo cambio nella tabella non suggerirebbe molto.

Cosa suggerisce invece la comparsa dello zero? Esiste una regola possibile da sfruttare per il calcolo della glide?

Conclusioni

Lo studio dell' algoritmo ACT potrebbe fornire spunti ulteriori alla comprensione del problema di Collatz.

Riferimenti

- [1] J. C. Lagarias: *"The $3x+1$ Problem: An annotated Bibliography"*
- [2] C. A. Feinstein: *"The Collatz $3n+1$ Conjecture is Unprovable"*
- [3] Sergio Faccia blog Eureka! di kataweb <http://serghej.blog.kataweb.it/>
- [4] R. Turco, M. Colonnese - La congettura di Collatz in N

Siti

CNR SOLAR

<http://150.146.3.132/>

Prof. Matthew R. Watkins

<http://www.secamlocal.ex.ac.uk>

ERATOSTENE group

<http://www.gruppoeratostene.com>

Dr. Michele Nardelli

<http://xoomer.alice.it/stringtheory/>

Blog

<http://MATHBuildingBlock.blogspot.com>

Colonnese Maria, Rosario Turco