

Block Notes Matematico

Il principio della dualità nella fisica - Classe di equivalenza delle teorie

ing. Rosario Turco

La matematica vettoriale è uno strumento potente e sintetico che permette di trattare facilmente le equazioni differenziali di diversi problemi di Fisica; essa, insieme al principio della dualità e alla teoria dei gruppi di Lie, consente di esplorare diversi problemi: dall'elettromagnetismo all'elettrodinamica quantistica (QED) etc. Nell'articolo vengono accennati, sempre da un punto di vista matematico, anche i sistemi a propulsione, argomento di recente interesse.

08/02/2010

Introduzione

Il dualismo è un concetto molto importante sia in matematica che in fisica; ma è ha un significato diverso da quello di equivalenza.

L'Equivalenza determina che, una stessa entità, partendo da situazioni al contorno diverse, può giungere allo stesso risultato finale; mentre il dualismo è un concetto che esprime la sovrapposizione di concetti complementari o addirittura opposti.

In fisica abbiamo ad esempio il "dualismo onda-particella" ma intendiamo che in certe situazioni il comportamento di una particella è quello tipico di un'onda, mentre in altre situazioni è quello tipico di una particella: ovvero sono comportamenti complementari che una stessa entità possiede e che esprime in situazioni al contorno diverse e mai contemporaneamente. Molte altre dualità riguardano l'elettromagnetismo, la M-teoria, la teoria delle superstringhe etc (vedi [1],[2],[3],[4]).

Anche in matematica abbiamo situazioni simili, ad esempio in geometria (Gergonne – 1826 – *dualità della geometria proiettiva*): due punti determinano una retta; due rette determinano un punto etc.

Nel seguito affronteremo solo da un punto di vista matematico un esempio classico, le equazioni dell'elettromagnetismo, dando per scontata la conoscenza fisica di tutto ciò. Per la semplicità dei simboli esamineremo soprattutto le equazioni in forma differenziale.

Ricordiamo che le equazioni dell'elettromagnetismo, dovute a Maxwell, sono essenzialmente le seguenti:

Legge corrispondente	Equazione
Teorema del flusso del campo elettrico	$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ (1)
Teorema del flusso del campo magnetico	$\nabla \cdot \vec{B} = 0$ (2)
Legge di Faraday o circuitazione del campo elettrico	$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ (3)
Legge di Ampere o circuitazione del campo magnetico	$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ (4)

Dove:

∇ è il simbolo matematico "nabla" indica il gradiente

$\nabla \cdot$ è il simbolo matematico della divergenza

$\nabla \times$ è il simbolo matematico del rotore

Mentre da un punto di vista fisico e vettoriale è:

\vec{E} il campo elettrico

\vec{B} l'induzione magnetica

\vec{H} il campo magnetico

\vec{J} la densità di corrente

ϵ_0 la costante dielettrica del vuoto $8,854188 \times 10^{-12}$ F/m

μ_0 la permeabilità magnetica del vuoto $4\pi \times 10^{-7}$ H/m

c_0 velocità della luce 3×10^8 m/s

Teniamo presente qualche *regola utile* per il prosieguo:

- La divergenza di un rotore è sempre nulla ovvero $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{C}) = 0$
- Il rotore di un gradiente è sempre nullo ovvero $\nabla \times (\nabla C) = 0$
- La divergenza di un gradiente è il *Laplaciano* ovvero $\nabla \cdot (\nabla C) = \nabla^2 C$
- Il rotore di un rotore invece è $\nabla \times (\nabla \times \vec{C}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{C}) - \nabla^2 \vec{C}$

Le equazioni dell'elettromagnetismo nel vuoto

Partiamo dalla equazione (4). Dividiamo ambo i membri per μ_0 e tenendo presente che

$$\frac{1}{c_0^2} = \mu_0 \epsilon_0$$

dove c_0 è la velocità della luce, otteniamo:

$$c_0^2 \nabla \times \vec{B} = \frac{\vec{J}}{\epsilon_0} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (4')$$

Ricordiamo che la *Forza di Lorentz* è notoriamente data da:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (5)$$

Le equazioni, comprese la (4') e la (5), sono le equazioni in forma locale o microscopica e consentono di calcolare i campi elettromagnetici nel vuoto a partire da valore noti di densità di carica ρ e la densità di corrente J .

Le equazioni dell'elettromagnetismo nei materiali

Se siamo all'interno di materiali allora le onde elettromagnetiche devono tener conto di altri fenomeni fisici, dovuti all'induzione elettrica D , la polarizzazione P , l'induzione magnetica M tale che:

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \\ \vec{B} &= \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) \end{aligned}$$

P ed M sono il valor medio del dipolo elettrico e magnetico per unità di volume.

Se si considera il mezzo *lineare e isotropo* si semplificano in:

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} \\ \vec{B} &= \mu_0 \mu_r \vec{H} \\ \mu &= \mu_0 \mu_r \\ \epsilon &= \epsilon_0 \epsilon_r \end{aligned} \quad (6)$$

Le equazioni, tenendo conto di un mezzo lineare e isotropo, diventano quindi:

Legge corrispondente	Equazione
Teorema del flusso del campo elettrico	$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \quad (1')$
Teorema del flusso del campo magnetico	$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (2)$
Legge di Faraday o circuitazione del campo elettrico	$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (3)$
Legge di Ampere o circuitazione del campo magnetico	$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (4'')$

Dove

μ_r la permeabilità magnetica relativa

La (3) può condurre a qualche altra cosa interessante attraverso le (6) e le regole viste all'inizio:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = -\mu_0 \mu_r \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{H}) = -\mu \frac{\partial}{\partial t} (\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) = -\mu \frac{\partial}{\partial t} (\vec{J} + \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) = -\mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Da cui è:

$$\nabla^2 \vec{E} = -\mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (7)$$

Se consideriamo il vuoto con $\rho=0$ e $J=0$ e che $\mu\varepsilon = \frac{1}{v^2}$, con v velocità della luce otteniamo che:

$$\nabla^2 \vec{E} = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (8)$$

che è l'equazione d'onda di D'Alembert nel vuoto. Si può ottenere con lo stesso procedimento quella per B.

Potenziale vettore e Potenziale scalare

Se nella (2) la divergenza è nulla, sfruttando il fatto che la divergenza di un rotore dà sempre un risultato nullo, allora esiste un *potenziale vettore* A , tale che:

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \nabla \times \vec{A} \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

La (3) diventa allora:

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \vec{A} \\ \nabla \times \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \vec{A} &= 0 \\ \nabla \times \left(\vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{A} \right) &= 0 \end{aligned}$$

Con l'ultima espressione, sfruttando la regola che il rotore di un gradiente è sempre nullo, allora introducendo un *potenziale scalare* ϕ è:

$$\vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{A} = -\nabla \phi$$

Per cui è:

$$\vec{E} = -\left(\nabla \phi + \frac{\partial}{\partial t} \vec{A} \right) \quad (10)$$

Sfruttando la (9)(10) si possono riscrivere anche le equazioni (1) (4) nel seguente modo:

$$\nabla \cdot \vec{E} = -\nabla \cdot \left(\nabla \phi + \frac{\partial}{\partial t} \vec{A} \right) = -\left(\nabla^2 \phi + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \vec{A} \right) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Il che è equivalente a:

$$\nabla^2 \phi + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \vec{A} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (11)$$

Mentre dalla (4) è:

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \times \vec{A} &= \mu_0 \vec{J} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \phi + \frac{\partial}{\partial t} \vec{A}) \\ c_0^2 (\nabla \times \nabla \times \vec{A}) &= \vec{J} - \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \phi + \frac{\partial}{\partial t} \vec{A}) \end{aligned}$$

$$-c_0^2 \nabla^2 \vec{A} + c_0^2 \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \phi + \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \frac{\vec{J}}{\varepsilon_0} \quad (12)$$

Trasformazioni di gauge

Vediamo cosa accade se sul potenziale vettore A e sul potenziale scalare ϕ si effettuano trasformazioni del tipo:

$$\begin{aligned} \vec{A} &\rightarrow \vec{A} + \nabla \psi \\ \phi &\rightarrow \phi - \frac{\partial \psi}{\partial t} \end{aligned}$$

Tenendo presente che la divergenza di un rotore è nulla e che il rotore di un gradiente è nullo, allora le equazioni dei vettori B ed E non cambiano (vedi la (9) e la (10)). Per cui si parla di *invarianza di gauge*.

Si può sfruttare l'invarianza di gauge e scegliere il vettore A in modo adeguato, ad esempio:

$$\nabla \cdot \vec{A} = -\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

Ora con la (1) e (10) si ottiene che:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -(\nabla \phi + \frac{\partial}{\partial t} \vec{A}) \\ \nabla \cdot \vec{E} &= -\nabla \cdot (\nabla \phi + \frac{\partial}{\partial t} \vec{A}) = -\nabla^2 \phi - \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \vec{A} = -\nabla^2 \phi + \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \frac{\rho}{\varepsilon} \end{aligned}$$

Da cui

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon} \quad (13)$$

Mentre se sostituiamo nella (12) si ottiene:

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{J} \quad (14)$$

La (13) e (14) costituiscono un sistema di 4 equazioni o un *quadrivettore* che descrive le onde che avanzano nello spazio-tempo a velocità c_0 . Difatti nella (14) i vettori A e J si possono scomporre nelle componenti in direzione x, y, z .

In pratica si risolvono le equazioni di Maxwell introducendo un potenziale vettore ed un potenziale scalare; poi si sfrutta l'invarianza di gauge riducendo il tutto ad un sistema di equazioni differenziali in quattro funzioni scalari come segue:

$$\begin{aligned}\nabla^2\phi - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} &= -\frac{\rho}{\varepsilon} \\ \nabla^2 A_x - \frac{\partial^2 A_x}{\partial t^2} &= -\mu_0 J_x \\ \nabla^2 A_y - \frac{\partial^2 A_y}{\partial t^2} &= -\mu_0 J_y \\ \nabla^2 A_z - \frac{\partial^2 A_z}{\partial t^2} &= -\mu_0 J_z\end{aligned}$$

Queste equazioni mettono in evidenza che il comportamento delle onde elettromagnetiche e della luce sono aspetti di uno stesso fenomeno.

La dualità elettromagnetica

Abbiamo visto precedentemente dalla (6) che i vettori \vec{B} ed \vec{H} sono legati, come anche i vettori \vec{D} ed \vec{E} . Supponiamo per semplicità di non essere in un materiale per cui sia valido il vettore \vec{P} :

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{E} &= \rho_e & \nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0 \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 & \nabla \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= \vec{J}\end{aligned}$$

Dove $\rho_e = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$.

Per dualità elettromagnetica si intende l'invarianza delle equazioni di sopra rispetto alle trasformazioni di rotazione continue nel piano del campo elettrico e del campo magnetico seguenti:

$$\begin{aligned}\vec{E}' &= \cos\theta \vec{E} + \sin\theta \vec{B} \\ \vec{B}' &= \cos\theta \vec{B} - \sin\theta \vec{E}\end{aligned}$$

La dualità elettromagnetica, ad esempio, è soddisfatta se $\rho=0$ e $\vec{J}=0$. In una situazione dinamica, in presenza di sorgenti come cariche elettriche e di corrente dovuta a cariche elettriche, per rispettare la dualità elettromagnetica occorre introdurre sorgenti magnetiche; per cui le equazioni assumono un aspetto generalizzato del tipo:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{E} &= \rho_e & \nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= -\vec{J}_m \\ \nabla \cdot \vec{B} &= \rho_m & \nabla \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= \vec{J}_e\end{aligned} \quad (15)$$

Le equazioni (15) sono invarianti, quindi, rispetto alle rotazioni continue nel piano (rotazioni di dualità):

$$\begin{aligned}
\rho_e' &= \cos \theta \rho_e + \sin \theta \rho_m \\
\rho_m' &= \cos \theta \rho_m - \sin \theta \rho_e \\
\overline{J}_e' &= \cos \theta \overline{J}_e + \sin \theta \overline{J}_m \\
\overline{J}_m' &= \cos \theta \overline{J}_m - \sin \theta \overline{J}_e
\end{aligned}
\tag{16}$$

In assenza di sorgenti magnetiche, le uniche trasformazioni duali possibili sarebbero solo quelle per cui $\theta = n\pi$ e quindi riconducibili al sottogruppo \mathbb{Z}_2 di $SO(2)$. In presenza di sorgenti magnetiche sono valide (15) e (16) e rimane costante il rapporto tra carica magnetica ed elettrica. Ad esempio se $\rho_m = 0$ otteniamo che:

$$\begin{aligned}
\rho_e' &= \cos \theta \rho_e \\
\rho_m' &= -\sin \theta \rho_e
\end{aligned}$$

Da cui è:

$$\frac{\rho_m'}{\rho_e'} = -\tan \theta$$

La dualità, quindi, fa nascere anche il concetto di "classi di equivalenza delle teorie"; ad esempio l'elettromagnetismo classico rappresenta quella classe di equivalenza di tutte quelle teorie per cui il rapporto delle cariche è costante.

In [1] è stata esaminata la teoria dell'elettromagnetismo e accennata la Teoria dei gruppi di Lie e dell'Algebra di Lie, mostrando anche il "gruppo complesso delle fasi $U(1) = \{ e^{i\theta} \}$ " che governa la simmetria delle equazioni di Maxwell. Ad esempio se definiamo $*$ come moltiplicazione allora $(U(1), *)$ è un gruppo; difatti:

Chiusura: $e^{i\theta_1} * e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1+\theta_2)} \in U(1)$

Associativa: $e^{i\theta_1} * (e^{i\theta_2} * e^{i\theta_3}) = (e^{i\theta_1} * e^{i\theta_2}) * e^{i\theta_3}$

Identità: $e^0 * e^{i\theta} = e^{i\theta} * e^0 = e^{i\theta}$

Inverso: $e^{i\theta} * e^{-i\theta} = e^0 = 1$

$U(1)$ è composto quindi da matrici complesse unitarie 1×1 e tali che $UU^\circ = U^\circ U = 1$.

Trasformazione di fase $U(1)$ del campo elettromagnetico

A livello formale matematico una trasformazione di fase $U(1)$ è possibile esprimerla con i tensori:

$$G_{\mu\nu}' = e^{i\theta} G_{\mu\nu}
\tag{17}$$

dove

$$G_{\mu\nu} = F_{\mu\nu} + i \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu}^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}
\tag{18}$$

In particolare (vedi [5]) F è il "bivettore di Maxwell" o *tensore del campo elettromagnetico*, introdotto da *Hermann Minkowski*, comunemente scritto come matrice. In [5] sono ben rappresentate le *proprietà* del tensore elettromagnetico, il suo significato fisico e legame con le grandezze fisiche dei campi e la *quadrivettore*, il legame con i potenziali, e la *rappresentazione lagrangiana*. Il tutto si può anche estendere all'elettrodinamica quantistica (QED).

Considerazioni sul dualismo

Tutti i modelli fisici di unificazione, ad esempio unificazione elettromagnetismo e gravità, la GUT e il Modello standard etc. si fondano tutti sullo stesso principio (di gauge) ovvero che ci sia un gruppo di simmetria, detto gruppo di simmetria di gauge.

Una teoria di gauge, dove il gruppo di gauge è un gruppo semplice, ha solo una costante di accoppiamento, quindi un'unica interazione fondamentale (vedi U(1) precedente).

Ad esempio nella GUT, le tre interazioni indipendenti di gauge del modello standard vengono messe in relazione tra loro. Inoltre in certe teorie SU(5) supersimmetriche o in certi modelli SO(10) non supersimmetrici, queste relazioni sono compatibili con i valori misurati delle tre interazioni del modello standard.

In ogni caso l'importanza del concetto di dualità ha sempre più interesse, prima da un punto di vista matematico poi da un punto di vista fisico.

Da un punto di vista matematico determinate simmetrie possono essere ipotizzate, come congetture, a causa di qualche evidenza tipica nella teoria delle equazioni (quelle differenziali principalmente), ma certe simmetrie/anti-simmetrie non sono state del tutto comprese, dal punto di vista fisico, anche per l'entrata in gioco di altri concetti: "rottura della simmetria", multi-dimensionalità etc.

In generale ogni teoria deve essere validata dai risultati sperimentali e questo per alcune teorie è possibile; mentre per altre non è così semplice con i mezzi attuali (Teoria delle stringhe).

Sistemi di propulsione non newtoniani ed i sistemi antiG

Una dei tentativi più interessanti, usando strade ed equazioni come quelle illustrate, è il tentativo di unificazione delle leggi della fisica (vedi anche [1],[2],[3]) con un sistema di equazioni o un modello matematico che possa descrivere insieme l'elettromagnetismo, la QED etc., ma con equazioni che comprendano la gravità.

Einstein ci lavorò un decennio e più, senza concludere nulla di significativo da pubblicare o che non fosse già noto. Cercava un modello matematico unificatore, un modello antiG.

Questo perché? Il concetto stesso di gravità, negli ultimi 100 anni, è stato ed è molto dibattuto per significato: è quello newtoniano, quello einsteiniano o è un effetto che dipende dalle dimensionalità e da effetti frattali etc? Dibattuta è anche la sua localizzazione e l'esistenza di eventuali particelle virtuali: la gravità attraversa gli atomi o no? Il gravitone esiste o no? Esiste un effetto diretto della gravità o è indotto (Einstein)? Quali sono gli effetti locali e a distanza, alle microdistanze e alle grandissime distanze?. In realtà finora non si è data ancora trovata la parola fine su questo argomento.

Un modello matematico unificato è certamente di grande interesse. Potrebbe definitivamente rispondere alla domanda: "è possibile realizzare dei sistemi *antiG* (antigravità) e/o di propulsione?".

La tecnica con cui realizzarli, in realtà, dipende anche dal significato di gravità e questo condiziona anche il fatto di *classificare un esperimento come antiG effettivo* o meno. Attualmente gli scienziati per i sistemi preferiscono parlare di sistemi a *propulsione non newtoniani* (P. N. N) o di *sistemi a elettrogravitazione* (quando dovuti a campi magnetici ed elettrici).

Gli effetti della antiG o dei sistemi P. N. N o elettrogravità, se realizzabili, possono portare sia a sistemi di levitazione che propulsione (dispositivi volanti e/o mezzi di sollevamento e spostamento: dischi, aerei, auto, treni, sollevatori e ascensori, astronavi, shuttle, etc): la realizzazione pratica di alcuni di essi avrebbe enorme interesse di massa se gli investimenti necessari alla realizzazione fossero tali da produrre oggetti alla portata di una buona fetta di utenti sul mercato. In ogni caso tale campo di ricerca è di grande interesse per il progresso scientifico e per i militari, che come sempre, cercano di essere all'avanguardia per motivi di sicurezza territoriale.

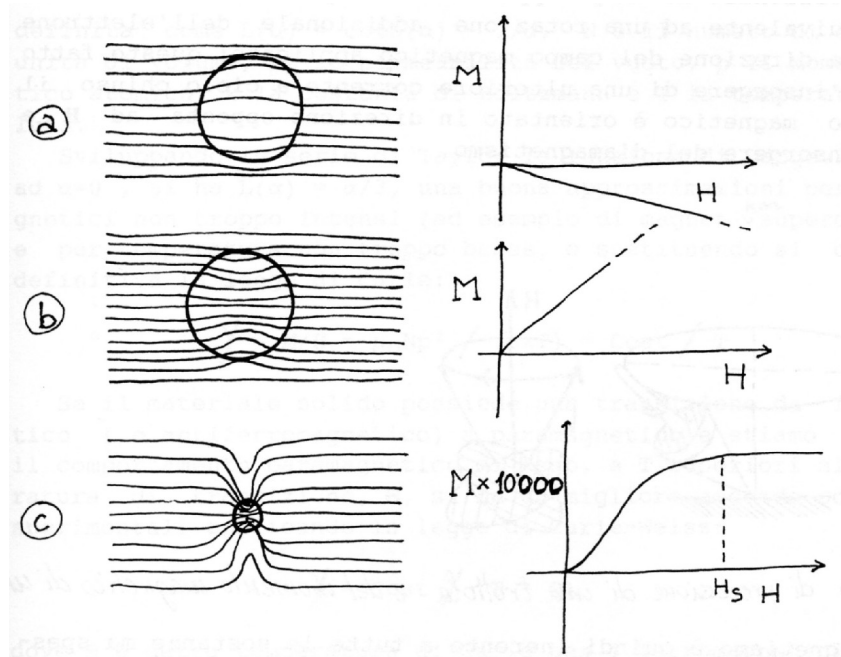
In [6] sono riportati gli esperimenti risalenti al 1997. Nell'esperimento si fecero levitare vari oggetti, compreso delle rane vive, da qui il titolo di [6], raggiungendo campi di 16T.

L'idea di base è quella anche del Levitron: gli oggetti diamagnetici sono rigettati, respinti da campi magnetici, perché i momenti magnetici M del solido si oppongono all'induzione magnetica B. Il comportamento diamagnetico, paramagnetico e ferromagnetico dipende dalla suscettività magnetica χ_m dei solidi.

Diamagnetici	χ_m	Paramagnetici	χ_m	Ferromagnetici	χ_m
Rame	$-1,1 \cdot 10^{-6}$	Platino	$1,2 \cdot 10^{-5}$	Ferro	1000
Bismuto	$-1,8 \cdot 10^{-4}$	FeCl ₂	$3,6 \cdot 10^{-3}$	Nickel	240
Silicio	$-1,2 \cdot 10^{-6}$	NiSO ₄	$1,2 \cdot 10^{-3}$	Cobalto	150
Germanio	$-0,8 \cdot 10^{-5}$	Fe(1000°C)	$2,5 \cdot 10^{-5}$		
Argento	$-2,4 \cdot 10^{-6}$				
Al ₂ O ₃	$-3,5 \cdot 10^{-6}$				

Il comportamento di un materiale, immerso in un campo magnetico variabile esterno H, è mostrato in figura. I materiali diamagnetici possiedono suscettività negativa; la curva di magnetizzazione assume l'aspetto di una retta con coefficiente angolare negativo e le linee di forza del campo magnetico all'interno del materiale sono più rarefatte che all'esterno di esso.

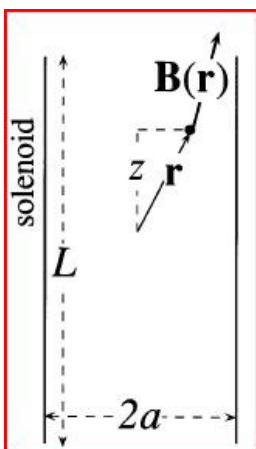
Per i materiali paramagnetici gli effetti sono rovesciati. Per i ferromagnetici la magnetizzazione è estremamente più intensa ma la curva di magnetizzazione non è più una retta quindi χ_m non è una costante (i valori in tabella sono indicativi). Quindi un sistema PNN è realizzabile con materiali diamagnetici; mentre non si ottiene una buona stabilità con quelli paramagnetici.



Curve di magnetizzazione $M = f(H)$ di un materiale diamagnetico (a), paramagnetico (b) e ferromagnetico (c)

Se il campo magnetico è sufficientemente forte può controbilanciare e superare la forza di gravità, nonostante l'apparente violazione del **teorema di Earnshaw**. Il teorema di Earnshaw dice semplicemente che "oggetti stazionari fatti di cariche elettriche, magnetiche e masse in una fissata configurazione NON può essere tenuto in equilibrio con forze dovute a campi elettrici, magnetici e gravitazionali", ovvero da forze che derivano da un potenziale che soddisfa l'equazione di Laplace. Infatti in generale lo stato di equilibrio di tali oggetti deve richiedere un punto di minimo della energia, ma l'energia deve soddisfare l'equazione di Laplace che ha non ha, tra le soluzioni, massimi o minimi isolati ma solo regioni a sella.

In realtà tale teorema non è applicabile all'induzione magnetica con materiali diamagnetici ed è possibile, quindi, trovare un punto di equilibrio tra le forze in gioco. *Un sistema di elettrogravità, quindi, inevitabilmente interpreta la gravità come un effetto newtoniano.* Senza voler introdurre tecniche matematiche complicate o tentare tecniche di unificazioni delle leggi della fisica, un sistema PNN con materiali diamagnetici è spiegabile con semplici equazioni vettoriali matematiche.



Nella trattazione per semplicità pensiamo a un solenoide per ragionare sul campo B , ed i suoi effetti simmetrici; ma in realtà nei Levitron non esistono solenoidi ma magneti che producono forti induzioni magnetiche.

Immaginiamo, come in figura, un campo magnetico in un solenoide verticale di lunghezza L . Il campo magnetico B nel punto $r = (x, y, z)$ lo indichiamo come $B(r)$. Il campo gravitazionale, invece, ha accelerazione di gravità g . Supponiamo che gli oggetti che devono essere levitati abbiano massa M , volume V , densità $\rho_m = M/V$ e suscettività χ .

I materiali diamagnetici hanno $|\chi| < 0$ ($\chi = -1$ avviene nei superconduttori) e ovviamente si è interessati a materiali diamagnetici per cui $|\chi| \ll 1$. In prima approssimazione il momento magnetico indotto $m(r)$ è:

$$m(r) = -\frac{|\chi| V \cdot B(r)}{\mu_0} \quad (19)$$

In [6] viene spiegato che una maggiore precisione nella formula si ottiene tenendo conto che l'oggetto e la sua forma introducono comunque una distorsione nel campo in cui è immerso. Se si calcola il lavoro compiuto da B , quando passa da zero a $B(r)$, occorre integrare la quantità $-d \cdot mB$ e si ottiene l'energia totale (energia dovuta alla gravità e al campo $B(r)$):

$$E(r) = mgz + \frac{|\chi| V \cdot B^2(r)}{2\mu_0} \quad (20)$$

Nella (20) c'è la coordinata z , avendo ipotizzato che l'asse delle z è rivolto verso il basso, come in figura.

Per ottenere equilibrio nel sistema, la forza totale si deve annullare, il che avviene quando:

$$F(r) = -\nabla E(r) = mge_z - \frac{|\chi| V}{\mu_0} \cdot B(r) \nabla B(r) = 0 \quad (21)$$

Dove con e_z è stato indicato il vettore unitario verso il basso; per cui la condizione di equilibrio si ha per:

$$B(z)B'(z) = \frac{\rho_m g \mu_0}{|\chi|} \quad (22)$$

Da qui si vede che più è piccola la suscettività e maggiore sarà il termine a sinistra dell'uguaglianza; inoltre la (22) coinvolge la densità dell'oggetto.

Verifica della stabilità

Occorre, ovviamente, verificare la stabilità del punto di equilibrio; cioè se nel punto di equilibrio è effettivamente associata una energia minima, ovvero se:

$$\oiint \vec{F}(r) \cdot d\vec{S} < 0$$

Dove l'integrale è su tutte le piccole superfici che coinvolgono il punto r di equilibrio. Per il Teorema della divergenza $\nabla \cdot F(r) < 0$ quindi ciò è vero, ma per i soli materiali diamagnetici.

Per i materiali paramagnetici, invece, occorre porre $\chi = -1$ nella (20) per cui si avrebbe una contraddizione. Difatti è $\nabla^2 B^2(r) < 0$ ma:

$$\begin{aligned} \nabla^2 B^2(r) &= \nabla^2 [B_x^2 + B_y^2 + B_z^2] = 2[|\nabla B_x|^2 + |\nabla B_y|^2 + |\nabla B_z|^2 + B_x \nabla^2 B_x + B_y \nabla^2 B_y + B_z \nabla^2 B_z] = \\ &= 2[|\nabla B_x|^2 + |\nabla B_y|^2 + |\nabla B_z|^2] \geq 0 \end{aligned}$$

L'ultima eguaglianza discende dal fatto che le componenti B_x, B_y, B_z di B soddisfano l'equazione di Laplace (non ci sono monopoli $\nabla \cdot B(r) = 0$ e non ci sono correnti nel solenoide quindi $\nabla \times B(r) = 0$).

Riferimenti

- [1] Congettura di Yang e Mills o del "gap di massa" – Rosario Turco, Maria Colonnese
- [2] Le dimensioni extra nascoste, la particella di Higgs ed il vuoto quantomeccanico, supersimmetria e teoria delle stringhe – Rosario Turco, Maria Colonnese
- [3] Teoria delle Stringhe e delle Brane – Rosario Turco, Maria Colonnese
- [4] Legami tra teoria delle stringhe e la funzione zeta di Riemann – Rosario Turco, Maria Colonnese, Michele Nardelli
- [5] Wikipedia - http://it.wikipedia.org/wiki/Tensore_elettromagnetico
- [6] Of Flying frogs and levitons – MV Berry (H H Wills Physics Laboratory - Bristol), AK Geim (High Field Magnet Laboratory, Department of Physics , University of Nijmegen) - Eur. J. Phys. 18 (1997) 307–313. Printed in the UK

This document was created with Win2PDF available at <http://www.win2pdf.com>.
The unregistered version of Win2PDF is for evaluation or non-commercial use only.