

Risposta a Ma3BF

FORUM - DISCUSSIONE

Quesito sulla zeta di Riemann proposto dall'ing. Pasquale Cutolo

In sintesi, sapendo che:

$$\gamma_m = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k \geq 1} \frac{(\ln k)^m}{k} - \frac{(\ln n)^{m+1}}{m+1} \right) \quad (\text{A})$$

$$\zeta(s) - \frac{1}{s-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \gamma_k}{k!} (s-1)^k \quad (\text{B})$$

La (B) è l'espansione in serie di Laurent attorno al polo $s=1$ e la (A) sono le *costanti di Stieltjes*.

In generale inoltre è:

$$\zeta'(1) = - \sum_{k \geq 1} \frac{\ln k}{k} \quad (\text{C})$$

Perché Con (B) e (C) si arriva a due risultati diversi se la zeta è la stessa?

Segue risposta di Rosario Turco

Una domanda intrigante.

Quando ci sono incoerenze con la zeta di Riemann occorre porsi le seguenti domande:

- La formula quando è valida? Per quale parte reale o parte del piano complesso?
- Il metodo è riconosciuto stabile o no?
- I calcoli sono esatti?

Ma indaghiamo ...

I punti chiavi sono:

- La (B) cosa è, per quale $\text{Re}(s)$ è corretta? Cosa rappresenta realmente?
- La singolarità in $s=1$
- In ultimo la verifica dei calcoli proposti (in APPENDICE)

Intanto non occorre nemmeno arrivare alle derivate m-esime. Osserviamo che partendo da $m=1$, sappiamo che:

$$\zeta'(s) = - \frac{1}{(s-1)^2} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \gamma_k}{k!} k (s-1)^{k-1} \quad (\text{a})$$

$$\zeta'(1) = - \sum_{k \geq 1} \frac{\ln k}{k} \quad (\text{b})$$

La (a) è ricavata da (B) come derivata prima: ora (a) e (b) dovrebbero essere la stessa cosa.

Scriviamo la (a) solo per alcuni termini per avere meglio le idee chiare:

$$\zeta'(s) = -\frac{1}{(s-1)^2} - \gamma_1 + \gamma_2(s-1) - 2\gamma_3(s-1)^2 + \dots$$

Quindi:

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)^2} = -\frac{1}{[(s-1)\zeta(s)]^2} + \frac{-\gamma_1 + \gamma_2(s-1) - 2\gamma_3(s-1)^2 + \dots}{\zeta(s)^2}$$

Poiché $\lim_{s \rightarrow 1} [(s-1)\zeta(s)] = 1$ e se $k < m$ (Se $k = m$ rimane almeno un termine γ_m) allora tutti i termini $(s-1)^m$ si annullano per cui è:

$$\frac{\zeta'(1)}{\zeta(1)^2} = -1 + \frac{-\gamma_1}{\zeta(1)^2} \text{ oppure } \zeta'(1) = -\zeta(1)^2 - \gamma_1$$

Ma $\zeta(1) = \infty$ (Vedi <http://mathworld.wolfram.com/RiemannZetaFunction.html>)

Per cui è sostanzialmente:

$\frac{\zeta'(1)}{\zeta(1)^2} = -1 + \frac{-\gamma_1}{\zeta(1)^2} = -1$ concorde con l'equazione funzionale. Ed è il "Metodo corretto", validato cioè dall'equazione funzionale.

Partiamo ora dalla (b) e teniamo conto degli infiniti di ordine superiore per cui γ_1 e γ_0 si trascurano:

$$\frac{\zeta'(1)}{[\zeta(1)]^2} = -1 \cdot \frac{\sum_{k \geq 1} \frac{\ln k}{k}}{\left(\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k}\right)^2} = -1 \cdot \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\gamma_1 - \frac{(\ln n)^2}{2} \right)}{\left(\lim_{n \rightarrow \infty} (\gamma_0 - \ln n)\right)^2} = -\frac{1}{2}$$

Dove abbiamo tenuto conto di:

$$\gamma_m = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k \geq 1} \frac{(\ln k)^m}{k} - \frac{(\ln n)^{m+1}}{m+1} \right)$$

Per cui quella che **cade in difetto è la B**. Essa non è definita per $s=1$ ma per $\text{Re}(s) > 1$.

Vedi Wolfram <http://mathworld.wolfram.com/RiemannZetaFunction.html> al rigo precedente alla formula (43).

Per cui abbiamo confrontato due formule non adatte. Una adatta nella striscia critica l'altra no.

Conclusioni

Il lavoro sulle dimostrazioni delle costanti di Stiltjes, risale agli anni 30 e, a detta di tutti, non è del tutto completato o dimostrato o tale da rappresentare attualmente una delle strade convincenti per una dimostrazione della RH. Nel suo procedimento si parte da due strade diverse: la C e la B. La B dà risultati più vicini all'equazione funzionale, nonostante sia una approssimazione (sviluppo in serie di Laurent per $s=1$). Lo svantaggio di tale trattamento è che non si ottiene una espansione manifestamente convergente. L'espansione è di carattere asintotica, il che dà un comportamento generale che in media compensa gli errori, ma comunque affetto da errori se si vuole una valutazione precisa locale. Uno studio migliore si effettua attraverso la η eta. Altre strade sono i

coefficienti di Bernoulli ed è in valutazione anche quella indicata da Bernstein. Una buona visibilità della trattazione possibile è <http://mathworld.wolfram.com/RiemannZetaFunction.html>

APPENDICE

VERIFICA CALCOLI (Procedimento proposto dall'ing. Pasquale Cutolo)

La verifica dei calcoli: essi erano corretti; ma il problema era costituito dal fatto che le formule non erano confrontabili.

$$\gamma_m = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k \geq 1} \frac{(\ln k)^m}{k} - \frac{(\ln n)^{m+1}}{m+1} \right) \quad (A)$$

$$\zeta(s) - \frac{1}{s-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \gamma_k}{k!} (s-1)^k \quad (B)$$

La (B) è l'espansione in serie di Laurent attorno al polo s=1 e la (A) sono le *costanti di Stieltjes*.

In generale è:

$$\zeta'(1) = - \sum_{k \geq 1} \frac{\ln k}{k} \quad (C)$$

Dalla (A) per m=1 è:

$$\sum_{k \geq 1} \frac{\ln k}{k} = \gamma_1 + \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} (\ln n)^2$$

Poiché è in generale:

$$\zeta(s) = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^s}$$

Allora per s=1, per gli *infiniti di ordine superiore* è:

$$\frac{\zeta'(1)}{[\zeta(1)]^2} = \frac{- \sum_{k \geq 1} \frac{\ln k}{k}}{\left[\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k} \right]^2} = - \frac{\gamma_1 + \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} (\ln n)^2}{\left(\gamma + \lim_{n \rightarrow \infty} \ln n \right)^2} = - \frac{1}{2}$$

essendo $\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right] = 0,5772156649$ la costante di Eulero-Mascheroni.

Tra l'altro è anche $\gamma = \lim_{s \rightarrow 1} \left[\zeta(s) - \frac{1}{s-1} \right]$ dalla (B) con k=0

In generale, tenendo presente la (A), ricaviamo che:

$$\frac{\zeta^{(m)}(1)}{[\zeta(1)]^{m+1}} = (-1)^m \frac{1}{m+1} \quad (D)$$

Proof

Infatti: $\zeta^{(m)}(1) = (-1)^m \sum_{k \geq 1} \frac{(\ln k)^m}{k}$,

ma $\sum_{k \geq 1} \frac{(\ln k)^m}{k} - \int_1^{\infty} \frac{(\ln x)^m}{x} dx = \gamma_m$, per cui:

$$\sum_{k \geq 1} \frac{(\ln k)^m}{k} = \gamma_m + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\ln n)^{m+1}}{m+1};$$

pertanto, abbiamo:

$$\begin{aligned} \frac{\zeta^{(m)}(1)}{[\zeta(1)]^{m+1}} &= (-1)^m \frac{\sum_{k \geq 1} \frac{(\ln k)^m}{k}}{\left(\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k}\right)^{m+1}} = (-1)^m \frac{\gamma_m + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\ln n)^{m+1}}{m+1}}{(\gamma + \lim_{n \rightarrow \infty} \ln n)^{m+1}} \\ &= (-1)^m \frac{\frac{\gamma_m}{\lim_{n \rightarrow \infty} (\ln n)^{m+1}} + \frac{1}{m+1}}{\left(\frac{\gamma}{\lim_{n \rightarrow \infty} \ln n} + 1\right)^{m+1}} = (-1)^m \frac{1}{m+1} \end{aligned}$$

Le γ_m sono le costanti di Stieltjes.

Partiamo da un'altra strada, applicando la sopra indicata formula (B); da essa ricaviamo:

$$\lim_{s \rightarrow 1} [(s-1)\zeta(s)] = 1 \quad (1)$$

Derivando, m volte, rispetto a "s", i membri della (3), e tenendo conto che $\Gamma(k+1) = k!$ otteniamo:

$$\zeta^{(m)}(s) - \frac{(-1)^m m!}{(s-1)^{m+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \gamma_k}{k!} (s-1)^{k-m} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1-m)} \quad (2)$$

Dividendo i membri della (5) per $\zeta^{m+1}(s)$, abbiamo:

$$\frac{\zeta^{(m)}(s)}{[\zeta(s)]^{m+1}} - \frac{(-1)^m m!}{[(s-1)\zeta(s)]^{m+1}} = \frac{1}{[\zeta(s)]^{m+1}} \cdot \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \gamma_k}{k!} (s-1)^{k-m} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1-m)} \right] \quad (3)$$

Passando al limite per $s \rightarrow 1$ e solo se $k < m$, il 2° membro della (3) si annulla (se è uguale a m rimane almeno un termine γ_k), per cui:

$$\lim_{s \rightarrow 1} \frac{\zeta^{(m)}(s)}{[\zeta(s)]^{m+1}} - \lim_{s \rightarrow 1} \frac{(-1)^m m!}{[(s-1)\zeta(s)]^{m+1}} = 0,$$

da cui, tenendo presente la (1), abbiamo:

$$\frac{\zeta^{(m)}(1)}{[\zeta(1)]^{m+1}} = (-1)^m m! \quad (4)$$

Assurdo! La (D) e la (4) danno risultati diversi!

Confronti con l'equazione funzionale

La (4), per $m = 1$ e per $m = 2$, dà un miglior riscontro con l'equazione funzionale

$$\zeta(s) = 2(2\pi)^{s-1} \sin \frac{\pi s}{2} \Gamma(1-s) \zeta(1-s),$$

prendendo il logaritmo naturale dei due membri e derivando, rispetto ad "s", otteniamo:

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \ln(2\pi) + \frac{\pi \cos \frac{\pi s}{2}}{2 \sin \frac{\pi s}{2}} - \frac{\Gamma'(1-s)}{\Gamma(1-s)} - \frac{\zeta'(1-s)}{\zeta(1-s)} \quad (5)$$

Dividendo ambo i membri della (5) per $\zeta(1-s)$, e passando al limite per $s \rightarrow 0$, troviamo:

$$\frac{\zeta'(1)}{[\zeta(1)]^2} = -1; \text{ lo stesso risultato lo possiamo ottenere applicando la (4) per } m=1$$

Ricordiamo che:

$$\lim_{s \rightarrow 0} [\sin \frac{\pi s}{2} \zeta(1-s)] = (1-s=p) = - \lim_{p \rightarrow 1} [\sin \frac{\pi(p-1)}{2} \zeta(p)] = -\frac{\pi}{2}$$

Ricordiamo, inoltre, che: $\zeta(0) = -\frac{1}{2}$, e che: $\zeta'(0) = -\frac{1}{2} \ln(2\pi)$

Derivando ambo i membri della (8), rispetto ad "s", dividendo dopo per $[\zeta(1-s)]^2$, e passando dopo al limite per $s \rightarrow 0$, troviamo:

$$\frac{\zeta''(1)}{[\zeta(1)]^3} = 2; \text{ lo stesso risultato che possiamo ottenere applicando la (7) per } m = 2.$$

This document was created with Win2PDF available at <http://www.win2pdf.com>.
The unregistered version of Win2PDF is for evaluation or non-commercial use only.