Block Notes Matematico

Problema dell’ennesimo termine nelle successioni di Fibonacci e di Lucas e sezione aurea

ing. Rosario Turco, prof. Maria Colonnese

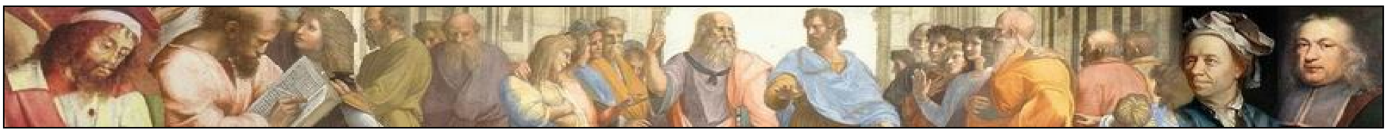
Sommario

Gli autori presentano formule in forma chiusa per calcolare rapidamente l’n-esimo termine nella successione di Fibonacci e della successione di Lucas, senza alcuna iterazione, e mostrano anche il legame con la sezione aurea phi.

Una particolare forma della successione di Lucas è attualmente importante per il suo legame con i numeri di Mersenne $Mp=2^p-1$ con p numero primo.

Email

mailto:rosario_turco@virgilio.it



INDEX

Introduzione

Gli autori non si addentreranno nella spiegazione delle proprietà delle successioni di Fibonacci e di Lucas e del loro legame con la sezione aurea, rimandando ai numerosi scritti e a Wikipedia. In questo lavoro vengono, invece, dimostrate due forme chiuse per il calcolo dell'n-simo termine della successione di Fibonacci e della successione di Lucas.

L'obiettivo di tale dimostrazione è la possibilità di un calcolo più rapido senza iterazione informatica.

Successione di Fibonacci

La successione di Fibonacci, dovuta a Leonardo Pisano, è una successione ricorsiva del tipo:

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n \quad \text{dove } x_0 = 0 \text{ e } x_1 = 1 \qquad (1)$$

Dalla (1) quindi si ottiene la classica sequenza di Fibonacci:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...

Successione di Lucas

La successione di Lucas è una successione ricorsiva dello stesso tipo:

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n \quad \text{dove } x_0 = 2 \text{ e } x_1 = 1 \qquad (2)$$

Dalla (2) quindi si ottiene la classica sequenza di Fibonacci:

2,1,3,4,7,11,18,...

Una particolare sequenza di Lucas è importante nella determinazione di valori record per i numeri di Mersenne Mp=2p-1 con p numero primo:

$$S(n)=S(n-1)^2-2 \quad \text{con } S(0)=4$$

Forma chiusa della successione di Fibonacci

Poniamo:

$$x_n = r^n$$

La (1) diventa:

$$r^{n+2} = r^{n+1} + r^n$$

Dividendo per r^n si ottiene l'equazione quadratica:

$$r^2 = r + 1 \qquad (3)$$

Le cui soluzioni sono:

$$r = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \quad \text{dove } \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Il che ci ricorda il legame della successione di Fibonacci con la sezione aurea Φ.

Da qui è possibile ideare una espressione in forma chiusa che deve rispettare analoghe condizioni al contorno della successione di Fibonacci vista nella (1), cioè:

$$x_n = A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \qquad (4)$$

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1 \end{cases} \qquad (5)$$

Dalla (5) si ricava che:

$$A = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$B = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

Per cui la (4) si può esprimere definitivamente come segue:

$$x_n = \frac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{2^n \sqrt{5}} \qquad (6)$$ *n-simo termine successione di Fibonacci*

Forma chiusa della successione di Lucas

Si può usare lo stesso procedimento, perché la (1) e la (2) sono simili. Per cui anche qui è valida la (4) ma con condizioni al contorno provenienti dalla (2), per cui è:

$$x_n = A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$ di nuovo la (4)

$$\begin{cases} A + B = 2 \\ A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1 \end{cases} \qquad (7)$$

Risolvendo la (7) è: A=1 e B=1.

Per cui la (4) nel caso della successione di Lucas diventa:

$$x_n = (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n + (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n \quad (8)$$

n-simo termine successione di Lucas

Limite dei rapporti nella successione di Fibonacci

Che succede nella successione di Fibonacci al limite dei rapporti di un termine e del precedente? Occorre considerare:

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(1+\sqrt{5})^{n+1} - (1-\sqrt{5})^{n+1}}{2((1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n)} = \frac{(1+\sqrt{5}) - (1-\sqrt{5})(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}})^n}{2(1+(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}})^n)} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi$$

Sites

CNR SOLAR
http://150.146.3.132/

Prof. Matthew R. Watkins
http://www.secamlocal.ex.ac.uk

Aladdin's Lamp (eng. Rosario Turco)
www.geocities.com/SiliconValley/Port/3264 menu MISC section MATEMATICA

ERATOSTENE group
http://www.gruppoeratostene.com

Dr. Michele Nardelli
http://xoomer.alice.it/stringtheory/