

SULLA RISOLUZIONE DELLE EQUAZIONI DI PELL
(ABOUT THE SOLUTION OF PELL'S EQUATIONS)

$$x^2 - D \cdot y^2 = \pm 1$$

***Sommario:** questo articolo è dedicato al calcolo dei valori numerici interi di x e di y soddisfacenti le due equazioni $x^2 - D \cdot y^2 = \pm 1$. Queste equazioni rientrano nel vasto ed interessante campo delle equazioni denominate diofantee od anche equazioni indeterminate, e sono equazioni da risolversi in interi (o in numeri razionali).*

Cercheremo di illustrare come si possono risolvere queste due equazioni anche se i valori interi più piccoli per x e y che le soddisfano sono numeri costituiti addirittura di qualche migliaio di cifre.

Daremo preliminarmente delle informazioni essenziali sulla Frazioni Continue; continueremo quindi con alcune principali osservazioni sullo sviluppo di un irrazionale quadratico, illustrando il metodo per il calcolo dei quozienti parziali a_i , per quello dei numeratori p_i e dei denominatori q_i delle ridotte della frazione continua,

sviluppo dell' irrazionale \sqrt{D} , essendo D un non quadrato perfetto.

Passeremo quindi a considerare l'equazione $x^2 - D \cdot y^2 = + 1$, nota sotto il nome di equazione di Pell, dando l'algoritmo per il calcolo dei più piccoli valori interi per x e y che soddisfano l'equazione.

Prenderemo in considerazione anche l'equazione $x^2 - D \cdot y^2 = -1$ che presenta per la sua risoluzione lo stesso tipo di algoritmo, ma che a differenza della prima equazione non risulta sempre risolvibile. Per questa equazione daremo anche alcuni tipi di valori di D per i quali non si hanno soluzioni.

Per ottenere dei risultati concreti per le due equazioni viene riportato in questa nota il breve listato in linguaggio Qbasic di un programma limitato alla loro risoluzione per valori di x e di y costituiti da non più di 15 cifre; soluzioni che si possono ricavare non andando oltre l'implicazione dell'aritmetica a doppia precisione.

Si è realizzato inoltre un programma più complesso, sempre, in linguaggi Qbasic, suddiviso in due principali parti, la prima per soluzioni dell'equazione aventi valori per x e y minori di 10^{15} , la seconda, implicante una aritmetica a precisione multipla in Base 10^7 , dedicato a risolvere la due suddette equazioni aventi come soluzioni valori di x e y anche molto grandi (costituiti anche da centinaia o addirittura migliaia di cifre) e dipendenti in modo non prevedibile dal valore di D . Nella presente versione dell'articolo non si è ritenuto opportuno allegare il listato di questo programma. Ripoteremo invece in allegato alcuni esempi di risultati ottenibili con il suddetto programma, mettendo in evidenza i valori numerici di x e di y , quali valori interi minimi soddisfacenti i due tipi di equazione ed i relativi tempi di calcolo.

***Abstract:** the aim of this paper is to illustrate the integers x and y , wick satisfactory values of the two Equations $x^2 - D \cdot y^2 = \pm 1$. These equations belong to the set of diophantine or indeterminate equations. In this paper we explain their solutions even if their satisfactory x and y values are large numbers.*

First we give some basic informations concerning the Continued Fractions, then we continue with some main remarks pertinent the development of quadratic irrational number \sqrt{D} by explaining the method of his partial quotients computation and also the computation of numerators and denominators of his convergents.

Then we consider the Pell equation $x^2 - D \cdot y^2 = 1$ and we give the algorithm for the computation of the least x and y solutions.

We also consider the equation $x^2 - D \cdot y^2 = -1$, wick has the same algorithm, but that can't always have any solutions. For this equation we too give some kinds of the D values, that have no solution.

In this paper we show one algorithm for both equations, limited to solutions of x and y values consisting of numbers smaller than 10^{15} , fullfilled by one short program in Qbasic language. This restriction is due only at the use of double precision arithmetic.

At the end we enclose a more complex program, still in Qbasic language (not carried out in this paper), formed into two main parts, the first regarding solutions of equations wick have satisfactory x and y values smaller than 10^{15} , the second using an original Radix 10^7 multiple-precision arithmetic for equations with large x and y solutions, namely satisfactory values with several tens of digits or some hundreds and even thousands of digits.

We report also, as enclosures, some results by using this program, highlighting the least x and y values, such as solutions of the tested equations, and their computation time.

Con il nome di equazione di Pell (o più propriamente di Pell - Fermat) è nota l'equazione $x^2 - D \cdot y^2 = 1$. Prenderemo in considerazione anche l'equazione $x^2 - D \cdot y^2 = -1$ che per la sua risoluzione presenta lo stesso tipo di algoritmo.

Sui loro sviluppi storici e in generale per loro notizie si rimanda a [Bei], [Dav], [Old].

Queste equazioni rientrano nel vasto ed interessante campo delle equazioni denominate *diofantee* o indeterminate, che sono equazioni da risolversi in interi (o in numeri razionali).

V'è subito qui da specificare che mentre l'equazione col termine noto + 1 risulta sempre risolubile l'altra equazione col termine noto -1 non sempre lo è.

In effetti è facile dimostrare⁽¹⁾ che non esistono valori interi di x e di y soddisfacenti la suddetta equazione per i seguenti tipi di valori di D ⁽²⁾:

- $D \equiv 0 \pmod{4}$ vale a dire per $D = 4 \cdot k$
- $D \equiv 3 \pmod{4}$ vale a dire per $D = 4 \cdot k + 3$
- $D \equiv 6 \pmod{8}$ vale a dire per $D = 8 \cdot k + 6$

Dove $k = 1, 2, 3, 4, \dots$

Inversamente, si dimostra [Nag] che l'equazione $x^2 - D \cdot y^2 = -1$ risulta sempre risolubile se D è un numero primo $\equiv 1 \pmod{4}$; ciò risulta senz'altro utile se già è noto che D è effettivamente primo.

Ci si propone qui di esporre e sviluppare alcuni argomenti dedicati alla loro risoluzione, e quindi calcolare i valori interi minimi per x e y che le soddisfano, con l'impiego dello sviluppo dell'irrazionale \sqrt{D} in frazione continua.

Nei riguardi delle frazioni continue, per le notazioni ed i simboli matematici delle varie grandezze in gioco e per le giustificazioni teoriche relative alle formule matematiche che vengono impiegate qui di seguito, si rimanda a [Old] e [Dav].

La frazione continua sviluppo di un generico irrazionale \sqrt{D} viene indicata come segue[Old]:

$$\sqrt{D} = [a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, 2a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, 2a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, 2a_1, a_2, a_3, \dots] \quad (1a)$$

con $a_1 = \lfloor \sqrt{D} \rfloor$ e dove uguali simboli per gli altri a_i indicano uno stesso valore numerico.

Con il simbolo generico $\lfloor x \rfloor$ si definisce l'intero più grande inferiore a x .

Tutti i vari a_i a partire da a_1 prendono il nome di *quozienti parziali* dello sviluppo di \sqrt{D} .

I quozienti parziali $a_2, a_3, \dots, a_n, 2a_1$ che si ripetono indefinitamente, formano il *periodo* dello sviluppo. E' consuetudine indicare il suddetto sviluppo come segue:

$\sqrt{D} = [a_1, \overline{a_2, a_3, a_4, \dots, a_n, 2a_1}]$, dove l'insieme dei valori soprilineati formano il *periodo*.

Il *periodo* può comprendere un numero pari o dispari di valori e può essere formato da pochi *quozienti parziali* come da molti, dipendendo il loro numero in modo non prevedibile dal valore stesso di \sqrt{D} .

(1) per $D = 4 \cdot k$ si ha $x^2 = 4 \cdot k \cdot y^2 - 1$; è evidente che x^2 e quindi anche x devono risultare di valore dispari; poiché poi il quadrato di un numero dispari può sempre porsi sotto la forma $8 \cdot m + 1$ si ha $8 \cdot m + 1 = 4 \cdot k \cdot y^2 - 1$ da cui $8 \cdot m = 4 \cdot k \cdot y^2 - 2$ e infine $4 \cdot m = 2 \cdot k \cdot y^2 - 1$, uguaglianza palesemente impossibile. Analoghe considerazioni si possono fare per gli altri tipi di valori di D .

(2) Considerando i tre tipi di valori di D elencati, l'equazione $x^2 - D \cdot y^2 = -1$ non risulta risolubile per almeno il 62,5 % dei valori di D .

Diamo qualche esempio.

Per $\sqrt{D} = \sqrt{28}$ il *periodo* è formato da 4 *quozienti parziali*: si ha $\sqrt{28} = [5, \overline{3,2,3,10}]$ come sarà mostrato più avanti ;

per $\sqrt{D} = \sqrt{37}$ il *periodo* è formato da un solo *quoziente parziale*: si ha $\sqrt{37} = [a, \overline{2a}] = [6, \overline{12}]$

per $\sqrt{D} = \sqrt{309}$ il *periodo* è formato da 26 *quozienti parziali*

per $\sqrt{D} = \sqrt{408}$ il *periodo* è formato da un *quoziente parziale*

per $\sqrt{D} = \sqrt{409}$ il *periodo* è formato da 21 *quozienti parziali*

per $\sqrt{D} = \sqrt{410}$ il *periodo* è formato da un *quoziente parziale*

per $\sqrt{D} = \sqrt{30001}$ il *periodo* è formato da 284 *quozienti parziali*;

per $\sqrt{D} = \sqrt{123456811}$ il *periodo* è formato addirittura da 20006 *quozienti parziali*.

Poiché la conoscenza del valore numerico di tutti i *quozienti parziali* formanti il *periodo* è indispensabile per la risoluzione dell'equazione di Pell, occorre trovare un algoritmo efficiente e veloce per il loro calcolo esatto.

Un semplice metodo di calcolo derivato da quanto accennato in [Chr], [Dav], [Old] può indicare la strada per sviluppare un algoritmo di tipo iterativo illustrato più sotto.

Prima però vediamo di esporre quanto segue.

Sia da sviluppare l'irrazionale $x_1 = \sqrt{D}$ in frazione continua;

Il simbolo generico $\lfloor x_i \rfloor$ come già detto indica l'intero più grande inferiore a x_i .

Si ponga $\sqrt{D} = x_1 = a_1 + \frac{1}{x_2}$ con $a_1 = \lfloor x_1 \rfloor$

Risolvendo l'equazione in x_2 si ottiene $x_2 = \frac{1}{x_1 - a_1}$

si ponga ora $x_2 = a_2 + \frac{1}{x_3}$ con $a_2 = \lfloor x_2 \rfloor$: si ottiene $x_3 = \frac{1}{x_2 - a_2}$

proseguendo: $x_3 = a_3 + \frac{1}{x_4}$ con $a_3 = \lfloor x_3 \rfloor$: si ottiene $x_4 = \frac{1}{x_3 - a_3}$

$x_4 = \dots\dots\dots$

$x_5 = \dots\dots\dots$

$\dots\dots\dots$

$x_{i-1} = a_{i-1} + \frac{1}{x_i}$ con $a_{i-1} = \lfloor x_{i-1} \rfloor$: si ottiene $x_i = \frac{1}{x_{i-1} - a_{i-1}}$

$x_i \dots = a_i + \frac{1}{x_{i+1}}$ con $a_i = \lfloor x_i \rfloor$ $\dots\dots\dots$

$\dots\dots\dots$

Ci si ferma nel procedimento quando si ottiene un valore di x_i per cui $a_i = 2 \cdot a_1$ in quanto si dimostra [Old] che nello sviluppo di un irrazionale del tipo suddetto gli ulteriori quozienti parziali si ripetono come mostrato in (1a).

Ma come si deve procedere per trovare nella maniera più opportuna i vari x_i e quindi i corrispondenti a_i ? Vediamo con un esempio numerico concreto di chiarire il procedimento.

Siano da calcolare i quozienti parziali della frazione continua relativa a $\sqrt{28}$.

Posto $x_1 = \sqrt{28}$ si considera $x_1 = a_1 + \frac{1}{x_2} = 5 + \frac{1}{x_2}$ dove $a_1 = \lfloor \sqrt{28} \rfloor = 5$ è il più grande intero inferiore a x_1 , cioè alla radice quadrata di 28.

Risolviendo la suddetta equazione in x_2 si ottiene: $x_2 = \frac{1}{x_1 - a_1} = \frac{1}{\sqrt{28} - 5}$

Risulta opportuno (vedi *Nota*) non calcolare subito il valore numerico di x_2 e da questo ricavare a_2 , ma razionalizzare il suo denominatore ottenendo così $x_2 = \frac{\sqrt{28} + 5}{28 - 5^2} = \frac{\sqrt{28} + 5}{3}$

da cui si trae: $a_2 = \lfloor x_2 \rfloor = 3$. Ripetendo per x_3 lo stesso tipo di procedimento fatto sopra si pone $x_2 = a_2 + \frac{1}{x_3}$. Si ha allora: $\frac{\sqrt{28} + 5}{3} = 3 + \frac{1}{x_3}$ da cui $x_3 = \frac{1}{\frac{\sqrt{28} + 5}{3} - 3} =$

$$= \frac{3}{\sqrt{28} - 4}$$

Razionalizzando di nuovo il denominatore si ottiene dopo qualche passaggio:

$x_3 = \frac{\sqrt{28} + 4}{4}$ da cui si trae $a_3 = \lfloor x_3 \rfloor = 2$. Continuando questo tipo di procedimento

per i successivi x_i si ottiene: $x_4 = \frac{\sqrt{28} + 4}{3}$ da cui si ricava $a_4 = \lfloor x_4 \rfloor = 3$

Proseguendo si trova $x_5 = \sqrt{28} + 5$ da cui finalmente $a_5 = \lfloor x_5 \rfloor = 10$

Avendo ottenuto per a_5 un valore uguale a $2a_1$ ci si ferma in quanto gli ulteriori a_i si ripetono come risulta da (1a). Si indicherà pertanto $\sqrt{28} = [5, \overline{3, 2, 3, 10}]$.

In effetti la teoria ci assicura che per un irrazionale \sqrt{D} nel calcolo dei vari a_i si arriva sempre ad un valore pari a $2 \cdot \lfloor \sqrt{N} \rfloor$, che i valori numerici dei quozienti parziali sono tutti numeri interi e che essi si ripetono, escludendo a_1 , in ogni periodo.

Da quanto mostrato con l'esempio relativo a $\sqrt{28}$ si può poi osservare che per il generico

valore di x_i vale la seguente formula: $x_i = \frac{\sqrt{D} + c_i}{b_i}$ da cui $a_i = \lfloor x_i \rfloor = \left\lfloor \frac{\sqrt{D} + c_i}{b_i} \right\rfloor$

Nota : il vantaggio di razionalizzare ogni volta il denominatore comporta la possibilità di realizzare per il calcolo dei quozienti parziali l'algoritmo illustrato, che presenta una maggiore precisione di calcolo. Ciò risulta evidente soprattutto quando il periodo è formato da molti quozienti parziali. Prendiamo un esempio tipico: per l'irrazionale $\sqrt{309}$ che ha un periodo costituito da 26 quozienti parziali, volendo calcolarli direttamente, senza il processo di razionalizzazione del denominatore di ogni x_i , e quindi senza il conseguente uso dell'algoritmo iterativo qui di seguito illustrato, tali quozienti, già dal 19° in poi risulterebbero errati anche con l'uso della doppia precisione. In corrispondenza poi del 27° quoziente parziale, invece di trovare un valore $a_{27} = 2 \cdot \lfloor \sqrt{309} \rfloor = 34$, come deve essere, si otterrebbe un valore $a_{27} = 5$ e quindi decisamente errato.

Non è difficile poi vedere, sempre osservando passo per passo lo sviluppo di \sqrt{D} , che i valori di c_i e di b_i sono legati ai precedenti valori c_{i-1} , b_{i-1} e $a_{i-1} = \left\lfloor \frac{\sqrt{D} + c_{i-1}}{b_{i-1}} \right\rfloor$ dalle

seguenti relazioni: $c_i = a_{i-1} \cdot b_{i-1} - c_{i-1}$; $b_i = \frac{D - c_i \cdot c_i}{b_{i-1}}$ dalle quali si può ricavare

$$a_i = \left\lfloor \frac{\sqrt{D} + c_i}{b_i} \right\rfloor$$

E' evidente che per calcolare il valore di b_i occorrerà calcolare prima quello di c_i . Sfruttando queste relazioni si può realizzare allora un algoritmo di tipo iterativo per il calcolo dei quozienti parziali a_i mostrato qui di seguito:

**ALGORITMO PER IL CALCOLO
DEI QUOZIENTI PARZIALI a_i di \sqrt{D}**

Si considerino le seguenti grandezze:
 a_i, b_i, c_i con i valori iniziali $a_1 = \lfloor \sqrt{D} \rfloor$; $b_1 = 1$; $c_1 = 0$
 vale il seguente algoritmo iterativo:

$$c_i = a_{i-1} \cdot b_{i-1} - c_{i-1} \quad (1)$$

$$b_i = \frac{D - c_i \cdot c_i}{b_{i-1}} \quad (2)$$

$$a_i = \left\lfloor \frac{\sqrt{D} + c_i}{b_i} \right\rfloor \quad (3)$$

con $i = 2, 3, 4, \dots$

Come si vede chiaramente i valori dei parametri c_i e b_i dell'iterazione i possono essere calcolati con i valori degli stessi parametri trovati nella iterazione precedente. Può essere poi calcolato con la (3) il valore del quoziente parziale a_i .

Si fa osservare che in ogni ciclo le tre suddette relazioni devono essere eseguite rigorosamente nella successione indicata, vale a dire deve essere eseguita prima la (1), quindi la (2) e infine la (3). Con il primo ciclo o iterazione dell'algoritmo suddetto, vale a dire per $i = 2$, si troverà il valore del quoziente parziale a_2 , per $i = 3$ il valore di a_3 e così via.

Il numero di cicli o iterazioni avrà termine quando si troverà per il quoziente parziale a_i un valore uguale a $2 \cdot a_1 = 2 \cdot \lfloor \sqrt{D} \rfloor$.

Torniamo ora a considerare l'equazione di Pell.

Ad ogni quoziente parziale a_i trovato deve seguire il calcolo relativo a due parametri p_i e q_i legati al quoziente parziale a_i dalle seguenti relazioni [Old], [Dav] anch'esse di tipo iterativo:

$$p_i = a_i \cdot p_{i-1} + p_{i-2} \quad (4)$$

$$q_i = a_i \cdot q_{i-1} + q_{i-2} \quad (5)$$

con $i = 2, 3, 4, \dots$

e con i valori iniziali: $p_0 = 1$; $p_1 = a_1 = \lfloor \sqrt{D} \rfloor$; $q_0 = 0$; $q_1 = 1$

Pertanto ogni ciclo iterativo sarà costituito dalle cinque relazioni (1), (2), (3), (4), (5)

Prima del termine di ogni iterazione sarà necessario naturalmente aggiornare sia i valori di p_{i-1} che di p_{i-2} , sia quelli di q_{i-1} che di q_{i-2} , per utilizzarli quindi correttamente nella successiva iterazione, effettuando in ordine le seguenti sostituzioni:

$$p_{i-2} = p_{i-1} ; \quad p_{i-1} = p_i$$

$$q_{i-2} = q_{i-1} ; \quad q_{i-1} = q_i$$

Procedendo ora ad eseguire le varie iterazioni, ognuna costituita dalle 5 suddette relazioni con l'aggiunta delle quattro indicate sostituzioni, si arriverà in ogni caso ad un valore $a_i = 2 \cdot a_1$. Sia n il valore assunto da i nella iterazione immediatamente precedente a quella in cui si è ottenuto il valore $2 \cdot a_1$.

Tenendo ora conto di quanto dimostrato ed illustrato sempre in [Old] o in [Dav], vale la seguente uguaglianza: $p_n^2 - D \cdot q_n^2 = (-1)^n$ dove p_n e q_n sono i valori ricavati dalle formule (4) e (5) nella iterazione immediatamente precedente a quella per cui si è ottenuto il quoziente parziale $2 \cdot a_1$.

Da notare che il valore numerico dell'esponente n risulta uguale al numero di quozienti parziali precedenti il quoziente parziale $2 \cdot a_1$ ed è uguale anche al valore numerico del *periodo*.

Per un n pari si ottiene quindi $p_n^2 - D \cdot q_n^2 = 1$

Confrontando questa formula con l'equazione di Pell si nota immediatamente che i valori trovati p_n e per q_n sono le soluzioni della suddetta equazione.

I valori $x = p_n$ e $y = q_n$ sono anche i valori più piccoli che soddisfano l'equazione [Old].

Inoltre per essa esistono altre infinite soluzioni con valori per x ed y più grandi [Old].

Per trovarle si può fare uso delle seguenti formule ricorsive [Sha]:

$$x_{k+1} = x_0 \cdot x_k + D \cdot y_0 \cdot y_k \quad (6)$$

$$y_{k+1} = y_0 \cdot x_k + x_0 \cdot y_k \quad (7)$$

con $k = 0, 1, 2, 3, \dots$

dove $x_0 = p_n$ e $y_0 = q_n$

Se invece n dovesse risultare dispari si procederà ad ulteriori iterazioni sino ad arrivare a quella per cui si ottiene un secondo quoziente parziale di valore pari a $2a_1$. L'iterazione immediatamente precedente sarà $i = 2n$ (*numero di quozienti parziali precedenti il secondo quoziente parziale $2a_1$* , vedi formula (1a)) che è evidentemente di valore pari.

Rifacendosi sempre ai riferimenti citati si otterrà in questo caso la seguente uguaglianza:

$p_{2n}^2 - D \cdot q_{2n}^2 = (-1)^{2n}$ da cui si ricava immediatamente $p_{2n}^2 - D \cdot q_{2n}^2 = 1$ e quindi le soluzioni dell'equazione di Pell saranno in questo caso $x = p_{2n}$ e $y = q_{2n}$.

Passiamo ora a considerare l'equazione $x^2 - D \cdot y^2 = -1$

Per questa equazione si sfrutta lo stesso tipo di algoritmo utilizzato per l'altra equazione.

Si è già fatto osservare che essa però non è sempre risolubile.

Prendendo in considerazione sempre la formula $p_n^2 - D \cdot q_n^2 = (-1)^n$, per n dispari essa diventa:

$p_n^2 - D \cdot q_n^2 = -1$ dove n è il valore assunto da i nella iterazione immediatamente precedente a quella in cui si è ottenuto il valore $2 \cdot a_1$. Confrontando questa formula con l'equazione $x^2 - D \cdot y^2 = -1$ si vede immediatamente che le soluzioni di questa equazione sono i valori trovati p_n e per q_n , che anche qui sono le soluzioni minime.

Per trovare le successive soluzioni più grandi valgono sempre le formule iterative (6) e (7) dove $x_0 = p_n$ e $y_0 = q_n$, ma con l'avvertenza che le effettive soluzioni sono solo quelle per cui x_k e y_k hanno indice k par. Si osservi che a differenza dell'equazione col termine noto positivo, se nello sviluppo dell'algoritmo l'iterazione immediatamente precedente a quella in cui si ottiene il quoziente parziale $2 \cdot a_1$ è pari, (e quindi per n pari), si può stabilire subito che l'equazione non è risolvibile, senza effettuare ulteriori iterazioni, in quanto nell'uguaglianza $p_{2n}^2 - D \cdot q_{2n}^2 = (-1)^{2n}$ il termine $(-1)^{2n}$ è evidentemente pari a +1 come lo sarà per $(-1)^{3n}$ e per tutti gli altri simili termini. Poiché per alcuni tipi di valori di D questa equazione non ha soluzioni, se nell'algoritmo di risoluzione si utilizzano le condizioni di non risolvibilità sopra esposte (vedi nota⁽²⁾) si potrà pertanto riconoscere senza ricorrere allo sviluppo dell'irrazionale \sqrt{D} che l'equazione non ammette soluzioni.

Viene riportato qui di seguito un listato in linguaggio QBasic di un programma riguardante la risoluzione delle due equazioni che presentano quali soluzioni valori di x e di y minori di 10^{15} . Questa limitazione deriva dal fatto che pur utilizzando nei calcoli aritmetici la doppia precisione si ottengono risultati esatti solo se inferiori a 10^{15} .

```

REM ----- PELLSE -----
' PROGRAMMA CHE SEGUE LE FORMULE DELL'ARTICOLO
' DEDICATO al calcolo dei valori interi più piccoli di x e di y, soluzioni
' delle due equazioni diofantee x^2 - D*y^2 = +1 e x^2 - D*y^2 = -1
' quando tali valori non superano il valore di 10^15
CLS : DEFDBL A-Z
INPUT "D"; d
INPUT "quale termine noto vuoi +1 o -1"; x$
IF x$ = "1" GOTO 101
REM d=k*v oppure d=4*v+3
u = d / 4: v = INT(u): w = d - 4 * v
IF w = 0 OR w = 3 THEN PRINT "+++ nessuna soluzione ": END
u1 = d / 8: v1 = INT(u1): w1 = d - 8 * v1
IF w1 = 6 THEN PRINT "???? nessuna soluzione ": END
REM ----- condizioni iniziali -----
101 n = 1: r = SQR(d): a = INT(r): b = 1: c = 0: a2 = 2 * a
p0 = 1: p1 = INT(r): q0 = 0: q1 = 1: ' PRINT "a ="; a, "2a="; a2
' -----
DO: IF a = a2 THEN y = y + 1
IF a = a2 AND n / 2 <> INT(n / 2) AND x$ = "-1" GOTO menol
IF a = a2 AND n / 2 = INT(n / 2) AND x$ = "-1" GOTO soluz
IF a = a2 AND n / 2 <> INT(n / 2) AND x$ = "1" GOTO soluz
n = n + 1
c = a * b - c: b = (d - c * c) / b: a = INT((r + c) / b)
p = a * p1 + p0: q = a * q1 + q0
PRINT n; a; b; c, p, q
IF p0 > 10 ^ 15 THEN PRINT "valore di x troppo grande": END
p0 = p1: p1 = p: q0 = q1: q1 = q
' DO: y$ = INKEY$: LOOP WHILE y$ = ""
LOOP UNTIL a = a2 AND n / 2 = INT(n / 2) AND y = 2
soluz: x = p0: y = q0: PRINT : PRINT "x ="; x : PRINT "y ="; y
x2 = x * x: IF x2 > 10 ^ 16 THEN END
PRINT "----- PROVA -----"
REM -- si effettua solo se il valore di x^2 risulta minore di 10^15 ---
y2 = y * y: k = d * y2
PRINT "x^2 ="; x2: PRINT "D*y^2 ="; k
PRINT "x^2 - D*y^2 ="; x2 - k
PRINT "D ="; d, "n="; n; "a="; a
END
menol: PRINT "*** nessuna soluzione ": END

```

Rimane aperto tuttavia il problema di trovare le soluzioni delle suddette equazioni allorché il valore di D è tale per cui le soluzioni minime sono valori numerici che eccedono il valore di 10^{15} .

Questo può accadere anche per valori di D piccoli . Ad esempio i valori di x e di y più piccoli che soddisfano l'equazione $x^2 - 277 \cdot y^2 = 1$ sono costituiti rispettivamente da 21 e 19 cifre; per un valore $D = 3061$ i valori minimi di x e di y che soddisfano l'equazione superano le 100 cifre e precisamente x è composto da 105 cifre e y da 103 cifre.

Basta poi prendere in considerazione dei valori di D un po' più grandi, composti anche da sole 5 cifre, per trovarne diversi che danno luogo a soluzioni minime che possono superare anche le 500 cifre. Ma c'è di più. Se questi valori di x e di y possono sembrare grandi risolvendo l'equazione $x^2 - 456564109 \cdot y^2 = 1$ i valori più piccoli di x e di y che la soddisfano sono composti ciascuno da un numero di cifre ben più consistente.

A prima vista potrebbe sembrare impossibile poter manipolare numeri così alti su di un computer fornito al massimo di una aritmetica a doppia precisione.

E allora come si possono ottenere questi valori numerici così grandi?

La risposta è quella di ricorrere alla realizzazione di una *aritmetica a precisione multipla* adatta ad effettuare tutti calcoli necessari con esattezza.

Si è realizzato pertanto un programma sempre in linguaggio Qbasic che contempla una aritmetica a precisione multipla in Base 10^7 creata specificatamente allo scopo.

Si precisa che ci si può limitare ad eseguire i calcoli in aritmetica a precisione multipla, nei riguardi solo delle le relazioni (4) e (5) in quanto per le relazioni (1), (2), (3) è sufficiente la doppia precisione, purché D non superi il valore di 10^{15} .

Ciò in quanto si dimostra [Dav],[Sha] che valgono i seguenti limiti:

$$0 < a_i < 2 \cdot \sqrt{D}; \quad 0 < b_i < 2 \cdot \sqrt{D}; \quad 0 < c_i < \sqrt{D}$$

Nella presente versione di questo articolo, per non appesantire troppo la sua esposizione non si è ritenuto opportuno allegare il listato di un apposito programma realizzato sempre in linguaggio Qbasic con il quale è stato possibile effettuare tutti i calcoli in modo esatto in modo da poter risolvere le due equazioni anche per valori di x e di y costituiti ciascuno anche da migliaia di cifre. I calcoli da eseguire in aritmetica a precisione multipla hanno riguardato solo le relazioni (4) e (5) sopra riportate in quanto sono stati presi in considerazione solo valori numerici di D (non quadrato perfetto) inferiore a 10^{15} .

Il programma in questione è stato realizzato per la risoluzione dell'equazione sia con termine noto $+1$ che -1 ed è suddiviso in due parti principali. La prima parte è dedicata a valori risolutivi per x e y minori di 10^{15} e rispecchia in modo pressoché totale il programma del riquadro sopra riportato. La seconda viene presa in considerazione se nello svolgersi dell'algoritmo iterativo applicato si ottengono dei risultati di calcolo maggiori 10^{15} . Ed è qui che allora subentra l'intervento delle istruzioni riguardanti l'aritmetica precisione multipla e quindi la risoluzione di valori di x e di y anche molto grandi.

Per poter poi mettere a disposizione del lettore la possibilità di utilizzare le prestazioni del suddetto programma risulta disponibile in separata sede, ma sempre sul presente sito un opportuno Eseguibile.

Nel programma vi sono inoltre istruzioni che riguardano la non risolvibilità dell'equazione con il termine noto -1 nei casi già sopra indicati.

Eseguendo il programma sia per l'uno che per l'altro tipo di equazione è implicito che vengono calcolate tutte quante le cifre di x e di y . Per una adeguata e completa visione sullo schermo dato l'eccessivo numero di cifre in gioco si è ritenuto opportuno di visualizzarle a gruppi di 1400 alla volta.

Si può constatare che in generale più i valori di D sono grandi, più è alta la probabilità di trovare numeri elevati quali valori risolutivi di x e di y .

E' opportuno pertanto fare presente che anche con il suddetto programma non sempre si è in grado di trovare le soluzioni dell'equazione: questa impossibilità non è dovuta all'algoritmo impiegato, ma alle limitazioni implicite nel software utilizzato; ciò può capitare in effetti quando il valore scelto per D è tale per cui nell'esecuzione dei calcoli i valori numerici raggiunti sono così elevati da non poter essere più gestiti e memorizzati nei vari vettori utilizzati. Comunque il programma e quindi l'Eseguibile funzionerà regolarmente se i valori risolutivi di x e di y saranno costituiti ciascuno da non più di 9000 cifre.

Vengono riportati e mostrati qui di seguito, dopo i Riferimenti, 3 esempi di risoluzione.

I valori numerici grandi di x e di y trovati vengono presentati per una migliore lettura con uno spazio ogni $g = 7$ cifre dove g è l'esponente della Base (Radix) di numerazione 10^g utilizzata .

RIFERIMENTI

- [Bei] - A.H. Beiler, *Recreations in the Theory of numbers, Second Edition*- Dover Publications
 [Chr] - G. Chrystal, *Algebra, an elementary Text-Book, Part II, Seventh Edition – Ch.XXXII* reprinted by AMS Chelsea Publishing,1999
 [Dav] - H. Davenport, *Aritmetica superiore*- La cultura matematica –Zanichelli , Bologna
 [Nag] - T. Nagell, *Introduction to Number Theory, Second Edition – Ch.VI*, Chelsea Publishing Company – New York -1981
 [Old] - C. D. Olds, *Frazioni continue- MM / Matematica Moderna – Zanichelli*, Bologna -1968
 [Sha] - D. Shanks, *Solved and Unsolved Problems in Number Theory, Third Edition - Ch.III*, Chelsea Publishing Company, New York- 1985

SITI WEB

- <http://www.bioinfo.rpi.edu/~zukerm/cgi-bin/dq.html>
<http://hometown.aol.com/jpr2718/pell.pdf>
<http://doe.ncia.net/~bobmead/Pells.html>
<http://www.personal.psu.edu/users/d/l/dls369/HistoricalPell.pdf>
<http://www.ifrance.com/math-express/articles/numbertheory/pell/pell2.htm>
<http://mathworld.wolfram.com/PellEquation.html>

----- 1° ESEMPIO -----

D? 84121
 quale termine noto vuoi (1 o -1)? -1

l'equazione $x^2 - 84121 * y^2 = -1$ viene soddisfatta
 per i seguenti valori minimi di x e di y :

$x =$ 4 3875814 8617434 2877630 4323442 5826020 2567847 8510357 8532390
 7280754 5883181 0903591 2970576 5916668 2031284 0451297 7705627 4998309 4930570
 1965462 1087762 6477564 8224412 8316683 1080372 9602758 1778627 7142904 1167419
 6194861 1041813 3443193 6798561 0194950 5641902 8399160

$y =$ 151277 0273515 2829763 2160393 5893226 4693005 7696227 3651891 3718126
 4653828 4298872 7204724 7354917 0252667 1125111 4802510 0835918 5636257 8266401
 4179611 0861703 4206863 8390782 2847634 9476991 6489107 8695249 6460889 2818126
 1754606 6996144 4108399 0124368 0206899 6088109

x è costituito da 246 cifre
 y è costituito da 244 cifre
 D = 84121
 tempo impiegato: .0625 secondi

----- 2° ESEMPIO -----

D? 6299737

quale termine noto vuoi 1 o -1)? -1

l'equazione $x^2 - 6299737 * y^2 = -1$ viene soddisfatta

per i seguenti valori minimi di x e di y:

x = 1 3188609 5057105 1806204 8474077 5423849 6667043 7184906 3270946
3547873 9063041 8660197 5517415 0262809 8713348 8840010 3798833 0342963 1314846
2567038 3341338 4700386 5505145 0078030 9362383 0093584 7045640 5806086 7253334
8190838 2137220 8649311 1454521 8293906 9942515 9424284 2307805 3328289 4290271
2292866 8301330 7185599 7121319 8161065 8094337 1703716 1259592 2281517 7232063
2686191 9397628 8394111 1376315 8406351 9822432 8643453 3713697 3132068 0680036
8551581 0582774 0411581 6752633 4361966 6912805 3905811 9778547 3851767 0175008
8560595 8984756 9451291 4686656 0572805 8866148 0090779 6197278 9690077 7391279
1456376 4800727 1234037 2233321 5979005 7564261 3497570 2666204 3594190 1559038
2915745 1143054 6537234 6230677 7812900 2952298 4491297 6870241 4285973 9079678
5292610 4379685 2786075 6590250 5234162 6533704 7762561 3418509 3445158 6910743
1139414 2392509 6046705 4368555 8285846 9523512 5219988 8639653 2117720 2794794
7005856 2837621 8333269 1317771 3571117 5363951 8374195 4661128 3546137 3723516
0169420 4347363 3974959 3296577 1932983 9342423 5863747 5765644 6367753 5347649
0667380 2336707 3060623 2704234 5096401 8756335 8065527 0029171 1353629 6174516
4845680 3642622 3343410 7745366 0171454 0466025 6455331 0751759 2284473 5071879
1018761 7646855 8561223 5851570 5878320 7765796 0671573 6922133 6913690 1185397
5191692 8190158 9105027 3951483 8329336 6278173 1281042 3581862 7862750 6309101
1913206 9477076 2804646 4297316 3555223 9659732

y = 5254 5774795 4540732 8396489 0226366 0582408 1052831 4422649 9927854
3300587 2274447 9619823 4362692 7891283 4169648 1675982 4511074 4533123 2406791
3225514 3637571 3533751 6203384 0348583 0846087 2634457 6325943 0632431 4677651
4013108 7842303 3026431 8791224 5540569 7699953 5684926 3828985 3898772 9398492
0738464 9374429 0564606 4025496 7437606 0415264 0301654 2026937 8550386 3884342
1768301 1993066 6140336 3776637 9332242 5314657 9941618 1173031 0515060 8644037
3294042 2741172 8130490 2465972 1951312 4450520 7619528 2642266 3523826 6301503
6837052 3365422 4989155 8092370 3301226 0747775 9192925 0932099 3854481 8198610
2874567 8314531 1266209 5769113 2513235 8564852 9089580 6859664 3477613 1541392
2911063 2142627 8813763 8560040 3065471 6480360 9461926 4184715 5241804 8862460
7501125 9320935 5109200 9973876 5051132 3646768 7164026 8617373 5100913 4979627
1549147 0848929 8150840 5651042 6550412 1943687 8983962 5189123 1355581 6557227
2363842 6961695 6061834 0453495 4310307 4409801 1894230 4685280 9393968 2089940
4630730 2577355 7504237 4571815 8340688 8513632 0618875 5901475 8712963 4905538
5752920 5027414 5772244 5729408 5351470 0942666 8609992 2100340 9265998 7459757
6599719 8467216 2441358 3065989 4769713 7505425 4537431 8070312 9556327 1271864
0180767 1592218 3318228 0688313 3620735 2763426 9429354 8863211 1192539 0027766
4867375 6893401 0098272 3165448 4602486 3295736 3401720 5460703 1671126 4361234
4322727 8419456 3116332 0870325 0920885

x è costituito da 1289 cifre

y è costituito da 1285 cifre

D = 6299737

tempo impiegato: .9296875 secondi

----- 3° ESEMPIO -----

D? 365929

quale termine noto vuoi 1 o -1)? 1

l'equazione $x^2 - 365929 * y^2 = 1$ viene soddisfatta
per i seguenti valori minimi di x e di y:

x = 3097160 0177237 2295268 9338416 5747608 1509731 9621303 6396466 1929707
2821566 7403313 8977399 9901627 0603876 9336338 0574682 1480178 6999968 6868146
9023790 4422507 8368834 2974778 7540207 4308062 7879529 8812549 3024151 4312188
6291531 4750092 4224713 3602878 9762190 9376276 6011015 3224591 9822634 2272816
8100695 7110518 8626288 5559710 5373121 3225036 1128485 1624820 9752178 0716103
3698431 4212621 0175531 4485995 0076355 1437609 8912940 0373165 6878317 8792155
8696732 1060366 8139422 6333034 6935398 9336350 1263429 6010128 5665620 1021314
4772783 6286903 8738663 7026159 4720340 6605197 0482189 7096888 9964670 3603800
3735065 7426047 1788990 6450737 6833697 8059551 9988294 2240065 3363412 1794190
2280065 8370734 2247064 5568090 8868873 3958035 5806993 9276437 1200249 5267179
9225478 7405520 3508739 2045223 2793744 4696601 1707066 3622402 9445615 5255576
4378419 8568341 3799529 0534513 4451561 8218536 6451480 7116665 0439915 4696433
6459142 8978917 9465257 8919216 5159097 6630923 6207513 0950710 1813837 1873315
3647809 6118171 1926505 2872346 8542445 7704769 4924995 9536233 5011099 5990788
9729800 9371128 5854646 8468207 6317963 0106473 9990585 3932101 6118508 2183475
7286348 7118215 3697598 1371900 6536552 3831780 4319247 7329550 9073173 4440538
5907622 2634843 2017283 8304124 5316829 6704629 1781655 3069556 9075548 3453325
7730551 9542049

y = 5119 9442228 3121480 4340786 9820650 0173847 6204924 3134959 4643664
4929747 1479626 8931415 1959368 2702730 3946714 9327803 4659688 9237479 1082705
6600537 8865870 6373982 2008855 9974440 7977251 1317239 7834904 4512828 8958627
5047240 5030704 6115626 2089034 4176160 8505748 7123247 9798425 9095431 9549175
4830557 1759935 7041548 6263667 7673225 8049302 1058526 7631275 1445651 0553157
7054150 6610336 1319448 5364295 5737724 8666909 2901082 7177632 5551061 1219158
2700632 2208903 2632741 5724626 3586651 7714403 8749406 8626570 5536895 3537397
2610151 2172403 8042495 4947506 9972390 7018793 1512827 8637060 7927001 1384029
3532308 9809679 9909511 1193098 3025014 8878319 9449940 8918854 2105490 1574419
0960256 0563324 4350507 9292426 2025166 5984546 2610533 9319571 6723900 1088646
8993489 5260894 6902851 6632159 1145277 9072727 9113789 6340628 7640626 1235348
6144985 3708987 8475716 4429852 8012658 0215531 1295146 0776126 8636445 9118134
1312390 6191692 2762054 5126533 3308150 6465482 5168256 5696886 8886737 3012815
9755156 0133457 3441546 0121307 7220342 0124652 4633121 5355849 0431478 6747618
8118111 4662024 9364932 4253967 6868319 2397517 8452625 1166968 3266573 2129118
9950479 5368711 9338192 8198978 7558564 7863857 9035499 5083877 3863568 2293396
1501924 4090567 9101816 0393659 8235079 9771756 0440546 1099160 2894091 4595880
6236283 4794360

x è costituito da 1197 cifre

y è costituito da 1194 cifre

D = 365929

tempo impiegato: .76953125 secondi