Infinità dei Numeri Perfetti

A cura del Gruppo Eratostene - http://www.gruppoeratostene.com/)

Con la collaborazione di Eugenio Amitrano
(http://www.atuttoportale.it/)

Contenuti dell'articolo:

↔

Enunciato

I numeri perfetti, i quali sono dati dalla somma dei loro divisori propri[(*1)], sia primi che non, sono infiniti.

(*1) = I divisori propri di un numero, sono i suoi divisori compreso l'uno ad esclusione del numero stesso.

Dimostrazione

Il numero 6 è un numero perfetto, infatti, i divisori di 6 sono 1, 2 e 3, e il 6 è dato proprio dalla loro somma. $6 = 1 + 2 + 3$.

É già noto che se il numero $2^p - 1$ è un numero primo, allora $\left(2^{p-1}\right) \cdot \left(2^p - 1\right)$ è un numero perfetto.

Ad esempio, osserviamo questa affermazione per i numeri da 2 a 6 numeri:

- Per $p = 2$, si ha $2^2 - 1 = 3$ numero primo e $\left(2^{2-1}\right) \cdot \left(2^2 - 1\right) = 2 \times 3 = 6$ numero perfetto. Infatti, i divisori propri di 6 sono 1, 2 e 3, e la loro somma $1 + 2 + 3 = 6$.

- Per $p = 3$, si ha $2^3 - 1 = 7$ numero primo e $\left(2^{3-1}\right) \cdot \left(2^3 - 1\right) = 4 \times 7 = 28$ numero perfetto. Infatti, i divisori propri di 28 sono 1, 2, 4, 7, e 14, e la loro somma $1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28$.

- Per $p = 4$, si ha $2^4 - 1 = 15$ numero composto.

- Per $p = 5$, si ha $2^5 - 1 = 31$ numero primo e $\left(2^{5-1}\right) \cdot \left(2^5 - 1\right) = 16 \times 31 = 496$ numero perfetto. Infatti, i divisori propri di 496 sono 1, 2, 4, 8, 16, 31, 62, 124, e 248, e la loro somma $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248 = 496$.

- Per $p = 6$, si ha $2^6 - 1 = 63$ numero composto.

I numeri di tipo $2^p - 1$, se primi sono sempre riconducibili alla forma $6n + 1$; e sia p che n sono entrambi infiniti. Inoltre, la forma $2^p - 1$ dà infiniti numeri primi, sebbene molto più rari dei numeri primi normali, e di conseguenza esistono infiniti numeri perfetti della forma generale $P = \left(2^{p-1}\right) \cdot \left(2^p - 1\right)$, uno per ognuno degli infiniti numeri primi della forma $2^p - 1$.

Osserviamo ora un'importante caratteristica. La seguente tabella mostra la riconducibilità nella forma $6n + 1$ dei numeri dispari $2^p - 1$ fino a $p = 12$.

TABELLA - 1

p	n	2^p-1	Primalità	Forma 6n±1
2		3	Primo	*N.A.*
3	**1**	7	Primo (*n = 1*)	$6 \times 1 + 1$
4		15	Composto	
5	**5**	31	Primo (*n = 5*)	$6 \times 5 + 1$
6		63	Composto	
7	**21**	127	Primo (*n = 21*)	$6 \times 21 + 1$
8		255	Composto	
9	**85**	511	Composto (*n = 85*)	$6 \times 85 + 1$
10		1023	Composto	
11	**341**	2047	Composto (*n = 341*)	$6 \times 341 + 1$
12		4095	Composto	

Disegnando la curva normale dei numeri primi, fino a 10^n, e sotto di questa la curva data dai primi di forma $2^p - 1$, si dovrebbe notare che anche questa è aperta e crescente lentamente verso l'alto, il che dimostrerebbe la loro infinità (come lo sono anche i numeri primi, cosa già dimostrata da Euclide), e quindi l'infinità dei rispettivi e biunivoci numeri perfetti P.

Per confermare questa ipotesi, verifichiamo che la forma $2^p - 1$ dà risultati ciclici, sotto l'aspetto dei fattori, giacché: per valori di p pari, $2^p - 1$ è sempre multiplo di 3, e quindi non è primo; per valori di p dispari $2^p - 1$ è quasi sempre**(*2)** della forma $6n+1$, ma lo è sempre quando $2^p - 1$ è primo, (*vedi Tabella - 1*), che insieme alla forma $6n-1$, contiene infiniti numeri primi; Quindi, sebbene più rari, sono infiniti anche i numeri primi di forma $2^p - 1$ sono infiniti, i quali danno origine ai numeri perfetti P, rari ma infiniti anch'essi.

(*2) = E' dimostrato che non tutti i numeri della forma $2^p - 1$ con p dispari sono riconducibili alla forma $6n+1$. Ciò vale però solo per $p = 2$, non di forma $6n+1$, ma di forma eccezionale $6 \times 0 + 2$, come pure il 3 $(6 \times 0 + 3)$; per p dispari maggiore di 3; è invece dimostrato che $2^p - 1$ è riconducibile a $6n+1$; (vedi: ***Tabelle 1 e 2*** in ***"Riconducibilità dei numeri primi di Fermat e di Mersenne nella forma 6n±1"***, che qui riassumiamo brevemente: se p è dispari, 2^p è sempre di forma $6n+2$, e se togliamo 1, abbiamo sempre $6n+1$, come per i tutti i numeri di Mersenne (tranne il 3 iniziale per il quale $p = 2$ pari, unica eccezione), e di forma $6n+1$.

Conclusioni

Nel "***Dizionario Enciclopedico Matematico***", Gruppo Editoriale ***Jackson***, alla voce "Perfetto, numero", si dice che attualmente non si è ancora stabilito se l'insieme dei numeri perfetti è finito o infinito. Con questo teorema, abbiamo dimostrato che il loro numero è infinito.