I NUMERI PRIMI DI EUCLIDE (O EUCLIDEI)

(e le forme $6k \pm 1$)

Sommario

In questo lavoro mostreremo come tutti i numeri primi euclidei sono di forma 6k +1, forma che, insieme all'altra forma 6k – 1, genera tutti i numeri primi (tranne il 2 e il 3 iniziali), compresi quindi anche i numeri primi particolari (gemelli, di Mersenne, di Fermat ecc.; e, in questo caso, i numeri primi euclidei, sia pure limitati alla prima forma).

Tenteremo inoltre una dimostrazione della loro infinità.

Come tutti i numeri primi sono di forma $6k \pm 1$ (Eulero), anche i numeri primi di Euclide, o euclidei, rispettano tale forma generale, seppure limitatamente alla forma 6k+1, come vedremo meglio in seguito. Dalla voce di Wikipedia "Numero di Euclide", vediamo meglio di cosa si tratta:

"In matematica, i numeri di Euclide sono gli interi della sequenza

$$E_n = p_n \# + 1$$

dove p_n è il primoriale di p_n, che è l'n-esimo numero primo.

Devono il loro nome al matematico greco Euclide, che li usò nella dimostrazione sull'esistenza di infiniti numeri primi.

I numeri primi di questa sequenza (identificata con il codice A006862 nell'archivio dell'OESIS) sono:

3, 7, 31, 211, 2311, 30031, 510511 …

E_6 (30031 =59 x 509) è il primo dei numeri di Euclide a non essere primo

E_{11} è nuovamente primo.

E’ stato congetturato, ma non dimostrato, che esista un’infinità di numeri di Euclide che siano anche primi”

(e detti anche “numeri primi euclidei”)

I primordiali sono i prodotti dei successivi numeri primi, fino a p_n :

$$p_1 \ x \ \ p_2 \ x \ \ p_3 \ x \ \ \dots \ p_n$$

Vediamo ora nella TABELLA 1 i primi primordiali e i primi numeri Euclidei, distinguendoli in primi e non.

Primoriali	Numeri di Euclide	primi (***euclidei***) o no
1x 2 = 2	2 + 1 = ***3***	**si**
1x***2x3***= ***6***	**6 + 1 =** ***7***	***si***
1x2x3x5 = 30	30 + 1 = ***31***	**si**
… =210	210 + 1 = ***211***	**si**
… =2 310	2 310+1 = ***2 311***	**si**
… =30 030 ;	30 030+1= 30 031	no (=59 x509)
… =510 510 ;	510 510+1=510 511	no(=19x97x277)
… …	… …	…

trovando così i primi numeri di Euclide (primi e non primi) della sequenza OESIS prima citati.

Tutti i numeri di Euclide,primi e non primi, sono della forma 6k+1 (tranne il 3 iniziale, di forma 6k+3 per k =0, infatti 3 = 6 x 0 +3 =3). Questo perché i due primi fattori propri dei primoriali sono 2 e 3, e 2 x 3 =6, comune a tutti i primordiali (ma anche ai fattoriali); k è invece il prodotto di tutti i rimanenti numeri primi ; per esempio

E_4 = 210,scrivibile anche come (2x3)(5x7) = 6 x 35 = 210, e quindi come forma 6k; per avere un numero di Euclide basta aggiungere 1 (per definizione di numero euclideo, che sia primo o no) e abbiamo 210 +1 = 211, in questo caso numero primo e quindi numero euclideo.

Ma anche con -1 si ottengono altri numeri, primi e non primi, ovviamente tutti ora di forma 6k-1 (tranne il 2 iniziale), per esempio:

3 - 1 =	***2***	primo
6 – 1 =	***5***	primo
30 – 1 =	***29***	primo
210 – 1 =	209 = 19 x 11,	209 non primo
2310 - 1 =	***2 309***	primo
30030 -1 =	***30 029***	primo
510510 -1 =	510 509 = 61 x 8 369,	510 509 non primo
…	….	…

In pratica fino a 510 510 si hanno cinque primi come numeri euclidei, di forma 6k+1, e cinque numeri primi non euclidei, di forma 6k-1 e per primordiali ancora più grandi potrebbe verificarsi la stessa cosa (tanti numeri primi euclidei quanti quelli non euclidei, o al massimo con piccole differenze a favore della forma 6k-1, come per i numeri primi normali (Eulero).

TABELLA 2

n	E_n	=	6 x	k’	+ 1 =	E_n…	$k’_n/k’_{n-1}$
1	E_1	=	6	1	+ 1 =	7	
2	E_2	=	6	5	+ 1 =	31	5/1 = 5
3	E_3	=	6	35	+ 1 =	211	35/5 = 7
4	E_4	=	6	385	+ 1 =	2311	385/35 = 11
5	E_5	=	6	5 005	+ 1 =	30 031	5 005/385 = 13
6	E_6	=	6	85 005	+ 1 =	510511	85 085/5005 =17
…	…		…	…		…	… …

dove il rapporto $k’_n/k’_{n-1}$ = ultimo numero primo del primoriale p_n #, ed è circa il rapporto tra E_n/E_{n-1}, per esempio 85005/5005 = 16,98 ≈ 17 di 17# = 510 510.

Passiamo ora ai numeri primi euclidei, così definiti da Wikipedia, e allo loro possibile infinità:

“ Un numero primo euclideo è un numero intero che sia primo che numero di Euclide. I numeri primi euclidei sono anche numeri primi primordiali. I numeri primi di questa sequenza identificati con il codice A0118239 nell’archivio dell’OESIS) sono:

3, 7, 31, 211, 2 311, 30 031, 200 560 490 131, …
Il successivo numero primo euclideo ha 154 cifre. E’ stato congetturato ma non dimostrato che esista un’infinità di numeri primi euclidei”

Il settimo ed ultimo numero tra quelli sopra indicati è ovviamente, come tutti quelli che lo precedono (tranne il solo 3 iniziale) e che lo seguono, di forma 6k +1, per quanto sopra detto, infatti è uguale a:

6 x 33 426 748 355 +1.

Circa l’infinità dei numeri primi euclidei, si può fare una tabella del loro numero fino a 10^n, per poi trarne qualche conclusione eventualmente utile alla soluzione del problema se sono infiniti o no. Indicheremo con E_n’ i numeri primi euclidei, per distinguerli dai numeri di Euclide non primi, E_n

TABELLA 3

E_n’ (10^n)	10^n
2°	10^1 (cioè fino a 10 ce ne sono due)
3°	10^2
4°	10^3
5°	10^4
6°	10^5
…	…
6°	10^11
7°	10^12
…	…
7°	10^153
8°	10^154 (numero di 154 cifre)
…	…
n°	?

Poiché En’ cresce, sia pure molto lentamente, al crescere di 10^n, i numeri primi euclidei sono sempre di più, sebbene sempre più rari, e più rari anche dei numeri primi di Landau, di forma (n^2) +1; ma potrebbero anche essere infiniti, come i più frequenti numeri di Euclide, poiché per p_n # n è infinito, e quindi E_n’ (numeri primi euclidei) può essere benissimo un sottoinsieme infinito di un insieme infinito, $E_n = p_n\#+1$, così come i numeri primi gemelli sono un sottoinsieme infinito di un insieme infinito (i numeri primi), anche se i numeri primi gemelli sono molto più frequenti dei numeri primi normali (fino a un miliardo ci sono circa 3 400 000 coppie di primi gemelli, contro soli sei numeri primi euclidei (vedi TABELLA 3) Rarità, quindi non vuol dire sempre finitezza. Di solito un sottoinsieme infinito di un insieme infinito è anch'esso infinito, come nell'esempio dei numeri primi gemelli (Rif.3), il cui numero è legato a N dalla formula

$$g(N) \approx N/(\ln N)^2 \ \ x \ \ 1{,}32032\ldots \qquad (1)$$

dove 1,32032 è una costante, senza la quale la formula ci dà il numero approssimativo (per difetto) delle coppie di Goldbach per N pari:

$$G(N) \approx N / (\ln N)^2 \qquad (2)$$

e senza l'elevazione al quadrato del logaritmo di N si ha la nota formula logaritmica di Gauss per la stima di $\pi(N)$:

$$\pi(N) \approx N/ \ln (N) \qquad (3)$$

Per il numero delle coppie di gemelli e delle coppie di Goldbach abbiamo quindi le relazioni con la formula di Gauss, mentre per i numeri primi euclidei, molto più rari dei numeri primi gemelli, tale relazione ancora non ce l'abbiamo, per dimostrare la loro infinità o meno (i soli numeri primi per cui si crede che possano essere finiti sono i numeri primi di Fermat, anch'essi di una rarità estrema)

I numeri di Fermat sono invece, a differenza dei numeri primi euclidei (di forma 6k+1), tutti di forma 6k-1, tranne il 3 iniziale:

$Fn = 6k - 1$ $\qquad\qquad$ $Fn = 2^{2^n} + 1$

(3) $\qquad\qquad$ $3 = 2^{2^1} + 1 = 2 + 1 = 3$

5 = 6 x 1 - 1 $\qquad$ 5 = 2^2 + 1

17 = 6 x 3 -1 $\qquad$ 17 = 2^4 +1

257 = 6 x 43 -1 $\qquad$ 257 = 2^8 +1

65 537 = 6 x 10 923 -1 $\qquad$ 65 537 = 2^16 +1

… … … …

Per questi numeri primi di Fermat si pensa però che non ce ne siano altri oltre i primi cinque e che quindi non siano infiniti (Nota 1).

A cura della Prof. Annarita Tulumello del

GRUPPO ERATOSTENE

Caltanissetta 15.5.2009

Riferimenti finali, reperibili sul nostro sito:

1.) “Conservazione della forma e del segno anche nei numeri semiprimi”

2.) “I numeri primi gemelli e l’ipotesi di Riemann generalizzata” Sezione Lavori della Prof. Tulumello

3.) “Numeri primi di Fermat, numeri primi di Mersenne e numeri di Collatz”

Nota 1.
Dal libro di Jan Stewart “L’eleganza della verità” Einaudi, pag. 148:

“…quali sono i numeri di Fermat? I primi tre li abbiamo già visti:: 3, 5, e 17. I due successivi sono molto più grandi: 257 e 65 537. E poi basta, non se ne conoscono altri. Nessuno è mai riuscito a dimostrare che esistono, o al contrario che non esistono. Per quel che ne sappiamo, il prossimo, eventuale numero di Fermat, [deve essere uguale o maggiore di $2^{33\,554\,432} + 1$, dove $33554432 = 2^{25}$] che ha più di dieci milioni di cifre”

Commento: Il prossimo e *ottavo* numero primo euclideo è composto da 154 cifre, mentre l’eventuale *sesto* numero primo di Fermat avrebbe circa dieci milioni di cifre: quindi i numeri primi euclidei, sia pure anch’essi rarissimi, sono tuttavia più frequenti e quindi meno rari dei numeri primi di Fermat, e pertanto anche maggiori probabilità di essere infiniti.

Ricordiamo che anche i fattoriali n! se si aggiunge o si sottrae 1 possono o no essere numeri primi, poiché anche

n! ± 1 è di forma 6 k ± 1 per via dei due primi fattori primi 2 x 3 = 6, e k come prodotto dei rimanenti numeri primi, come detto per i primordiali. Per esempio
3! - 1 = 6 - 1 = 5 primo e = 6 + 1 = 7 primo,
4! - 1 = 24 -1 = 23 primo e 24 +1 = 25 non primo,
e così via.

FINE