

Nuova relazione di Goldbach Abbondanza di Goldbach

Gruppo Eratostene

Introduzione

L'Ing. Cristiano Teodoro, nostro valido collaboratore esterno, in una sua breve nota della quale lo ringraziamo, ci ha segnalato recentemente alcuni numeri pari per i quali la relazione di Goldbach $G(N-2) + G(N+2) \sim G(N)$ con $N = 6n$ non è valida, poiché per essi il rapporto tra $(GN)/G(N\pm 2)$ non è prossimo a 2, ma a 3.

I numeri segnalati sono: “45780, 44940, 53340, 55230, 57540, 67410”.



Facciamo ora una breve verifica con il test dell'Ing. Rosario Turco (vedi in sezione “Programmi & Software”, “Software scritti dall'Ing. Rosario Turco”, il “Programma per il calcolo di $G(N)$ ” sul numero 45780 per il quale abbiamo:

$G(45778) = 316$
 $G(45780) = 1038$
 $G(45782) = 337$

con 1038 molto più grande di 316 e di 337, circa tre volte, e precisamente $1038/316 = 3,28\dots$ e $1038/337 = 3,08\dots$ anziché circa le due volte previste dalla nostra relazione di Goldbach:

$$G(6k-2) + G(6k+2) \sim G(6k) \sim 2 \cdot G(6k\pm 2)$$

Poiché i due addendi in genere quasi si equivalgono, $G(6k)$ è circa il doppio di uno di essi, resta comunque ugualmente valida come caso generale, anche se opportunamente modificata per casi particolari come per gli esempi indicati dall'Ing. Teodoro; nei quali, infatti, il rapporto $G(6k)/G(6k\pm 2)$, si discosta dalla media, e tocca quasi anche il valore 3 e anche più, anziché circa 2 come nella generalità dei casi degli altri numeri pari multipli di 6. Ora vedremo il perché.

Se ci riferiamo ad una *nuova relazione di Goldbach*, che in fondo ci piace di più, per $N = 6k$:

$$G(N)/G(N\pm 2) \sim 2 \text{ per la generalità dei casi} \quad (1)$$

$$G(N)/G(N\pm 2) \geq 3 \text{ per numeri con fattorizzazione particolare} \quad (2)$$

Altro esempio: $67410 = 6 \cdot 11235$

$G(67408) = 495$
 $G(67410) = 1415$
 $G(67412) = 467$

ora con rapporti $1415/495 = 2,85\dots$, $1415/467 = 3,02\dots$ all'incirca come nell'esempio precedente per il numero pari 45780.

Una possibile causa della relativa "rarietà" di questi numeri potrebbe essere ricercata nella loro quasi comune fattorizzazione, che comprende alcuni piccoli numeri primi, e quindi un possibile fattoriale o **primoriale** (segnato in rosso), ed un numero primo molto più grande,

Questo primoriale farebbe aumentare, come vedremo alla fine e analogamente come fanno i multipli dispari di tre nella generalità dei numeri pari, considerevolmente il numero delle coppie di Goldbach rispetto ai numeri pari vicini, di forma $6k \pm 2$; e quindi determinando l'aumento del rapporto $G(6k)/G(6k \pm 2)$ dal valore medio di circa 2 a circa 3 e anche più per questi numeri N con fattorizzazione simile (con presenza di fattoriali e quindi anche di primordiali), che vedremo con la successiva TABELLA 4, tenendo conto anche dei fattori di N-2 e di N+2, naturalmente privi del fattore 3, il quale favorisce notevolmente la formazione delle coppie di Goldbach per i numeri pari $N = 6k$, e quindi con fattori principali 2 e 3 (e quindi il più piccolo fattoriale $2 \cdot 3 = 6$, che coincide anche col più piccolo primoriale $2 \cdot 3 = 6$, cosa molto importante, come vedremo.

TABELLA 1

N	fattori	N-2	fattori	N+2	fattori
45780	1,2,2,3,5,7,109	45778	1,2,47,487	45782	1,2,11,2081
44940	1,2,2,3,5,7,107	44938	1,2,22469	44942	1,2,23,977
53340	1,2,2,3,5,7,127	53338	1,2,26669	53342	1,2,149,179
55230	1,2,3,5,7,263	55228	1, 2,2,13807	55232	1,2,2,2,2,2,2,863
57540	1,2,2,3,5,7,137	57538	1,2,13,2213	57542	1,2,28771
67410	1,2,3,3,5,7,107	67408	1,2,2,2,2,11,383	67412	1,2,2,19,887
...

La conclusione è che per numeri $N = 6k$ con fattorizzazione molto similea quella dei numeri sopra considerati (e che contenga un più o meno qualche piccolo primoriale, in questi casi $7\# = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$), il rapporto $G(N)/G(N \pm 2)$ sarà più elevato della media (circa 2) e quindi prossimo a 3 o più, come per i numeri di cui sopra, come abbiamo già verificato per i numeri 45780 e 67410 tra quelli indicati dall'Ing. Teodoro.

Per esempio, un numero simile di nostra costruzione:

$$N = 2*3*5*7*127 = 26670 = 6*4445; \quad (2*3=6; 5*7*127=4445 = k)$$

$$\begin{aligned} G(26670-2) &= G(26668) &= 207 \\ G(26670) &&= 674 \\ G(26670+2) &= G(26672) &= 205 \end{aligned}$$

$$\text{Rapporti:} \quad 674/207 = 3,25, \quad 674/205 = 3,28$$

che superano entrambi il valore 3, e confermano la nostra intuizione sulla similitudine della fattorizzazione (con un primordiale) per i numeri N con più alti rapporti $G(N) / G(N \pm 2)$.

Osserviamo ora anche $7\# = 2*3*5*7 = 210$, comune a tutti i numeri suggeriti dal'Ing. Teodoro (per esempio $45780/210 = 218$, ecc.) , il che ci suggerisce che anche i fattoriali potrebbero avere lo stesso ruolo dei primordiali nell'aumento di coppie di Goldbach per numeri pari aventi un numero fattoriale come fattore.

Per N pari come fattoriali puri, per esempio

$$6! = 2*3*4*5*6 = 720,$$

abbiamo infatti :

$$G(718) = 14$$

$$G(720) = 39$$

$$G(722) = 13$$

Con rapporti $39/14 = 2,78$, $39/13 = 3$, il che conferma la nostra spiegazione sul perché alcuni numeri pari N (fattoriali o primordiali puri, o contenenti come fattori un fattoriale o un primordiale) hanno più coppie di Goldbach rispetto a numeri pari vicini $N \pm 2$ che invece non li contengono.

Per un primordiale puro, come per esempio $11\# = 2*3*5*7*11 = 2310$, abbiamo infatti:

$$G(2308) = 33$$

$$G(2310) = 114$$

$$G(2312) = 33$$

Con rapporto $114/33 = 3,45$ sia per $G(N-2)$ che per $G(N+2)$, quindi ancora superiore che per i fattoriali. Per un altro primordiale più piccolo, per es. $7\# 210$, abbiamo:

$G(208) = 7$
 $G(210) = 19$
 $G(212) = 6$

con rapporti $19/7 = 2,71$ $19/6 = 3,16$ pure elevati e prossimi a 3.

Per $13\# = 11\# * 13 = 2310 * 13 = 30030$, abbiamo:

$G(30028) = 232$
 $G(30030) = 905$
 $G(30032) = 221$

Con rapporti $905/232 = 3,90$, $905/221 = 4,09$ con valori prossimi a 4

Quindi, più che i fattoriali $n!$, sono i primoriali $p\#$ a far crescere velocemente, al crescere di n , il numero di coppie di Goldbach e quindi i rapporti

$$G(p\#)/G(p\# \pm 2) > 2$$

(nuova relazione di Goldbach) sia nei primordiali puri sia (ma un po' di meno) nei numeri pari che hanno un primoriale come fattore.

Ora un esempio di come ciò possa accadere: analogamente a come fanno i multipli dispari di 3 nella generalità dei casi $N = 6k$, che si accoppiano tra loro lasciando più liberi i numeri primi di accoppiarsi tra loro e quindi di formare più coppie di Goldbach con somma N , rispetto ai numeri pari di forma $6k \pm 2$, anche i multipli dispari di 5, di 7, di 11 ecc. insomma di tutti i numeri primi presenti nel primoriale presente tra i fattori di $n\#$ fanno altrettanto.

Esempio unico per tutti:

$N = 7\# = 210$, $G(210) = 19$, $G(208) = 7$, $G(212) = 6$,

con rapporti $19/7 = 2,71$, $19/6 = 3,16 > 3$

p	+	q	= N
1	+	209	(= 210)
3		207	multipli dispari di 3
5		205	multipli dispari di 5
7		203	multipli dispari di 7
9		201	multipli dispari di 3
11		199	entrambi primi: coppia di Goldbach, 11+199=210
13		197	entrambi primi: coppia di Goldbach
15		195	multipli dispari di 3
17		193	entrambi primi: coppia di Goldbach
19		191	entrambi primi: coppia di Goldbach
21		189	multipli dispari di 3
23		187	23 primo, 187 composto = 11*17
25		185	multipli dispari di 5
27		183	multipli dispari di 3
29		181	entrambi primi: coppia di Goldbach
31		179	entrambi primi: coppia di Goldbach
33		177	multipli dispari di 3
35		175	multipli dispari di 5
37		173	entrambi primi: coppia di Goldbach
39		171	multipli dispari di 3
41		169	41 primo, 169 composto =13^2
43		167	entrambi primi:coppia di Goldbach
45		165	multipli dispari di 5
47		163	entrambi primi: coppia di Goldbach
49		161	multipli dispari di 7
51		159	multipli dispari di 3
53		157	entrambi primi: coppia di Goldbach
55		155	multipli dispari di 5
57		153	multipli dispari di 3
59		151	entrambi primi: coppia di Goldbach
61		149	entrambi primi : coppia di Goldbach
63		147	multipli dispari di 3
65		145	multipli dispari di 5
67		143	67 primo, 143 composto = 11*13
69		141	multipli dispari di 3
71		139	entrambi primi: coppia di Goldbach
73		137	entrambi primi: coppia di Goldbach
75		135	multipli dispari di 5
77		133	multipli dispari di 7
79		131	entrambi primi: coppie di Goldbach
81		129	multipli dispari di 3
83		127	entrambi primi:coppie di Goldbach
85		125	multipli dispari di 5
87		123	multipli dispari di 3
89		121	9 primo, 121 = 11^2
91		119	multipli dispari di 7
93		117	multipli dispari di 3
95		115	multipli dispari di 5
97		113	entrambi primi: coppia di Goldbach
99		111	multipli dispari di 3
101		109	entrambi primi:coppia di Goldbach
103		107	entrambi primi: coppia di Goldbach
105		105	multipli dispari di 5

In totale abbiamo:

- 19 coppie di Goldbach
- 15 coppie di multipli dispari di 3
- 10 coppie di multipli dispari di 5
- 4 coppie di multipli dispari di 7
- 4 coppie miste primi/composti

su un totale di 52 coppie di numeri dispari con somma 210, con $52 \sim 210/4 = 52,5$ (4 poiché si eliminano le coppie di numeri pari e la metà delle coppie di numeri primi, simmetriche rispetto all'altra metà, considerate nella tabella, poiché, per esempio, $103+107=107+103=210$)

15 coppie di multipli dispari di 3 poiché $210/4*3 = 17,5 \sim 15$

10 coppie di multipli dispari di 5 poiché $210/4*5 = 10,5 \sim 10$

4 coppie di multipli dispari di 7 poiché $210/4*7 = 7,5 \sim 4$

4 coppie rimanenti di numeri misti primi/composti

Per $N = 208$ e 212 , con lo stesso procedimento, si hanno invece rispettivamente 7 e 6 coppie di Goldbach, non essendoci i fattori 3, 5, e 7 con i loro multipli dispari e il loro ruolo favorevole alla formazione delle coppie di Goldbach. Esempi simili si possono fare facilmente per tutti i fattoriali e i primoriali, con risultati analoghi.

Abbondanza di Goldbach

Analogamente all'abbondanza dei numeri altamente composti, come i fattoriali e i multipli dei fattoriali, e definita come il rapporto tra la somma di divisori $\sigma(n)$ ed n , e quindi:

$$r = \frac{\sigma(n)}{n} = \text{abbondanza} \quad (1 \text{ per i numeri perfetti})$$

ora definiamo "abbondanza di Goldbach" (parallela all'abbondanza di cui sopra), il rapporto r' tra il numero $G(N)$ delle coppie di Goldbach per $N = n\#$ e il numero delle coppie di Goldbach per $N = n\# \pm 2$ (poiché in genere si equivalgono, prenderemo il valore più basso).

Facciamo qualche esempio, e poi una tabella comparativa finale tra le due abbondanze con $r =$ abbondanza di Goldbach, $r' =$ abbondanza normale.

per $7\# = 210$

$r = 19/6 = 3,16,$

$r' = 576/210 = 2,74 < 3,16,$

$r/r' = 3,16/2,74 = 1,153$

($576 = \sigma(210)$)

per $7!$

$r' = \sigma(5040)/5040 = 18890/5040 = 3,74$ e l'abbondanza di Goldbach, essendo $G(5040) = 184,$

G(5038) = 68,
 G(5040) = 184
 G(5042) = 58

Con rapporti $184/68 = 2,70$; $184/68 = 3,17 = r$ ed $r/r' = 3,17/3,74 = 0,84$;

Tabella comparativa per i primoriali più piccoli, fino a 17#

n#	G(n#-2)*	G(n#)*	G(n#+2)*	$\sigma(n\#)**$	r	r'	r/r'
6	1	1	1	6	1	1	1
30	2	3	2	72	1,5	2,4	0,62
210	7	19	6	576	3,16	2,74	1,15
2310	33	114	33	4602	3,45	1,99	1,73
30030	232	905	221	66738	4,09	2,22	1,84
510510	2499	9493	2267	1231314	4,18	2,41	1,73
...

*Come algoritmi abbiamo usato quelli dell'Ing. Rosario Turco, sia quelli dell'Ing. Cristiano Teodoro, vedi sezione "Software" sul nostro sito)

** Come algoritmo abbiamo usato "Anadivi" del prof. Giuseppe Merlino vedi in sezione software scritti dall'Ing. Giuseppe Merlino", "Una grande collezione di programmi di matematica di varia natura".

Come si nota, le due abbondanze r ed r' crescono, sia pure irregolarmente, al crescere di n#, e quindi il loro rapporto r/r', che tende a 2 per valori superiori a 17#.

L'abbondanza di Goldbach è quindi superiore all'abbondanza tradizionale di circa due volte, almeno fino a 17# = 510510.

Per i fattoriali più piccoli, vediamo ora la relativa Tabella comparativa, fino a 8! = 40320:

n!= ...	G(n!-2)	G(n!)	G(n!+2)	$\sigma(n!)$	r	r'	r/r'
3!	6	1	1	1	1	1	1
4!	24	3	3	3	1	1,5	0,33
5!	120	6	12	4	3	2	1,5
6!	720	15	39	14	2,78	2,35	1,18
7!	5040	70	184	59	3,11	2,83	1,09
8!	40320	312	951	282	3,37	2,94	1,14
...

Notiamo che ora l'abbondanza di Goldbach per i fattoriali è leggermente minore che per i primoriali (per numeri paragonabili, per esempio 30030 e 40320, essa è

rispettivamente di 4,09 e 2,94, e anche il rapporto tra le due abbondanze è minore: sempre per i due suddetti numeri, è rispettivamente di 1,84 e 1,14; infatti, in genere, per i primoriali il rapporto r/r' è più prossimo a 2, mentre per i fattoriali è più prossimo a 1, salvo i due casi eccezionali iniziali per $5\# = 30$ e $4! = 24$, con rispettivi valori di 0,62 e 0,33.

In generale, possiamo quindi dire che l'abbondanza di Goldbach per i primoriali è un po' maggiore dell'abbondanza di Goldbach per i fattoriali. Poiché l'abbondanza tradizionale r' dei fattoriali e in genere dei numeri superabbondanti e abbondanti colossali è connessa alla RH1 (Ipotesi RH equivalente, Rif. 1 e seguenti), probabilmente anche l'alta abbondanza di Goldbach per i primoriali potrebbe essere in qualche modo connessi alla RH1.

Considerazioni finali

Circa la nuova relazione di Goldbach, osserviamo ancora che l'oscillazione di $G(N)$ varia solo in base ai fattori di N , e tra questi c'è un primordiale (o N è un primoriale puro), il rapporto $r = G(N)/G(n+/-2)$ (abbondanza di Goldbach) conserva l'abbondanza del primordiale fattore: per esempio 840, multiplo del primordiale $7\# = 210$, infatti $840 = 210 \cdot 4$, conserva l'abbondanza 3 e 2,83 del primoriale puro 210.

All'inizio ci può essere qualche irregolarità della $G(N)$, ma poi la l'oscillazione si fa più regolare. I multipli di 6 (che, ricordiamo, è anche $3\#$ ma anche $3!$), i fattoriali hanno un'abbondanza di Goldbach leggermente inferiore a quella dei primordiali di grandezza simile), e quindi l'abbondanza di Goldbach per $N = 6k$ è sempre un po' superiore a $G(N+/-2)$, a causa del fattore 3 (e del primordiale $3\#$) e il ruolo dei suoi multipli dispari; nei primordiali più grandi, tale ruolo (favorire la formazione di più coppie di Goldbach) è anche svolto dai multipli dispari dei successivi numeri primi: 5, 7 (e successivi per primordiali più grandi), come mostrato nella Tabella per $N = 7\# = 210$ (esempio unico per tutti). In tal modo l'abbondanza di Goldbach più elevata si trova nei primoriali e nei loro multipli:

$$G(p\#) > G(p\# + 2), \text{ con } r < p/2$$

e un po' meno per i fattoriali e i loro multipli; mentre invece l'abbondanza tradizionale ($\sigma(n)/n$) è più elevata nei fattoriali e i loro multipli. In linea di massima, funziona così, salvo qualche piccola irregolarità iniziale, come spesso capita per altre formule sui numeri primi; ma, al crescere di N , la cosa si regolarizza un po', pur non dando equazioni precise, ma ancora solo approssimative.

Ora nel grafico **tipo comet rosso** su "La congettura Goldbach" (vedi voce di Wikipedia), possiamo benissimo dire che la curva superiore riguarda i primoriali e i

loro multipli, la curva inferiore, che non raggiunge mai il valore zero ($G(N) = 0$) il che conferma la verità di Goldbach, riguarda invece solo i semiprimi con il solo fattore 2 e un numero primo qualsiasi, e quindi con il minimo di coppie di Goldbach:

$$(G(N+/-2) \sim N/\ln(N+/-2)^2);$$

nel mezzo, tra queste due curve limite, tutti i casi intermedi; ne consegue che, essendo infiniti i numeri primi, e quindi anche i primoriali, l'abbondanza di Goldbach può raggiungere valori molto elevati (ma sempre minori di $p/2$, quindi $r < p/2$), cosa sulla quale si potrebbe ulteriormente indagare con tabelle e grafici, trovando nuove relazioni, possibilmente anche logaritmiche, tra $N = p\#$ e la loro abbondanza r .

Occorrerebbero però algoritmi più potenti per calcolare $G(N)$ di numeri $N = p\#$ molto elevati, tipo qualche miliardo. Tali algoritmi saranno utili per mettere un po' più ordine su tale argomento, l'oscillazione di $G(N)$ rispetto a $G(N+2)$, quale che sia N pari (N conserva approssimativamente l'abbondanza di un eventuale primoriale compreso tra i suoi fattori, elemento dal quale siamo partiti).

Riferimenti

1. "Dai multipli di 6 (numeri abbondanti) alla RH (equivalenza $RH1 = RH$)" sul nostro sito, in sezione "Articoli su Riemann".
2. "L'equivalenza di Lagarias $RH1 = RH$ esaminata con i soli numeri fattoriali. Nuova proposta di soluzione per la congettura di Goldbach" Di Noto, Francesco e Michele Nardelli (pubblicata sul sito del Dott. Nardelli e sul database Solar del CNR).
3. "Proposta di dimostrazione della variante Riemann di Lagarias equivalente all'ipotesi di Riemann RH, con $RH1 = RH$ ", idem.
4. "Sulle spalle dei giganti" versione in italiano e in inglese, pubblicata sui nostri siti.
5. "Numeri primi in cerca d'autore", idem
6. "Abundant numbers and the Riemann Hypothesis", di Keith Briggs, sul sito <http://projecteuclid.org> e sul sito: <http://projecteuclid.org.euclid.em/1175789744>