I numeri nontotienti e noncototienti

Gruppo Eratostene

αωαωαω

Abstract

In this work the authors starting from the definition of the totient function, focus on the numbers and nontotienti noncototienti the form 6k +1 and links with Tartaglia, Fibonacci and Goldbach.

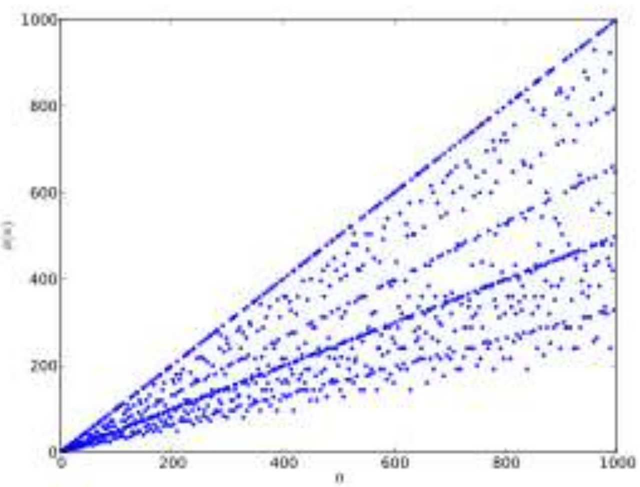
Riassunto

In questo lavoro gli autori partendo dalla definizione della funzione totiente, si concentrano sui numeri nontotienti e noncototienti, le forma 6k$\pm$1 e legami con Tartaglia, Fibonacci e Goldbach e l'abbondanza di Eulero..

La funzione totiente

Definizione

La **funzione** $\varphi(n)$**di Eulero**, detta anche **funzione totiente** o semplicemente **funzione di Eulero** o **totiente**, è definita, per ogni intero positivo *n*, come il numero degli interi > 0 e < *n*, coprimi con *n*. Ad esempio, $\varphi(8) = 4$ poiché i numeri coprimi di 8 sono: 1,3,5,7..



$\varphi(n)$è una funzione molto importante nella teoria dei numeri, principalmente perché è la cardinalità del gruppo moltiplicativo di interi di modulo *n*, più precisamente l'ordine del gruppo dell'anello **Z**/*n***Z** (vedere aritmetica modulare). Questo fatto, unito con il teorema di Lagrange, dimostra il teorema di Eulero: se *a* è un numero coprimo con *n*, allora

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \mod n$$

Fig. 1 primi 1000 valori di $\varphi(n)$

La funzione totiente è legata a molte altre funzioni: Moebius, zeta di Riemann (vedi [1]). Nel seguito approfondiremo, invece, aspetti legati ai numeri "nontotienti" e "noncototienti".

Tabella 1 – con **funzione totiente** legata alle forma 6k+1 (**in blu i valori minimi per n = 6**k)

6k-4	6k-3	6k-2	6k-1	6k	6k+1
2 **1**	3 **2**	4 **2**	5 **4**	6 **2**	7 **6**
8 **4**	9 **6**	10 **4**	11 **10**	12 **4**	13 **12**
14 **6**	15 **8**	16 **8**	17 **16**	18 **6**	19 **18**
Tot = **11**	**16**	**14**	**30**	***12***	**36**

La funzione φ sembra quindi preferire i numeri 6k -1 e 6k+1. essendo φ(p) = p -1 per n = p = numero primo; e assume valori più piccoli (in blu) per i numeri di forma 6k

Alcuni valori della funzione (in rosso per i numeri primi: φ(p) = p - 1; e blu per i multipli di 6 , φ (6k) ~ 6k/3 , la nostra evidenziazione)

$\varphi(n)$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0+		1	1	2	2	**4**	**2**	**6**	4	6
10+	4	**10**	**4**	**12**	6	8	8	**16**	**6**	**18**
20+	8	12	10	**22**	**8**	**20**	12	18	12	**28**
30+	**8**	**30**	16	20	16	**24**	**12**	**36**	18	24
40+	16	**40**	**12**	**42**	20	24	22	**46**	**16**	**42**
50+	20	32	24	**52**	**18**	**40**	24	36	28	**58**
60+	**16**	**60**	30	36	32	**48**	**20**	**66**	32	44
70+	24	**70**	**24**	**72**	36	40	36	**60**	**24**	**78**
80+	32	54	40	**82**	**24**	**64**	42	56	40	**88**
90+	**24**	**72**	44	60	46	**72**	**32**	**96**	42	60

Questa connessione tra funzione φ(n) e le forme 6k±1 dei numeri naturali n può essere utile ad una successiva connessione tra tale funzione ed una ipotesi RH equivalente.

Numeri nontotienti

Definizione

Un numero intero *n* si definisce **nontotiente** se l'equazione $\varphi(x) = n$ non ha soluzioni; dove *φ(x)* è la funzione di Eulero. In altre parole - dato che la funzione *φ(x)* è definita come il numero degli interi positivi minori o uguali ad *x* che gli sono coprimi - *n* è un nontotiente solo se non esiste alcun numero intero *x* che abbia esattamente *n* interi minori e coprimi.

Tutti i numeri dispari sono nontotienti ad eccezione dell'1: per il quale l'equazione

$$\varphi(x) = 1$$

ha soluzioni $x = 1, x = 2$.

I primi numeri pari nontotienti sono:
14, 26, 34, 38, 50, 62, 68, 74, 76, 86, 90, 94, 98, 114, 118, 122, 124, 134, 142, 146, 152, 154, 158, 170, 174, 182, 186, 188, 194, 202, 206, 214, 218, 230, 234, 236, 242, 244, 246, 248, 254, 258, 266, 274, 278, 284, 286, 290, 298, 302 (**Sequenza A005277 dell'OEIS**).

Proprietà

Un numero pari nontotiente può essere maggiore di una unità di un numero primo - ad esempio 14 (13+1), 38 (37+1) - ma mai minore di una unità.

Questa considerazione deriva da una proprietà della funzione *φ*, per la quale *φ(x) = x-1* sse *x* è primo. Quindi, se *x* è primo, *x-1* non può essere nontotiente.

Esistono numeri dispari nontotienti?

Dalla serie suddetta sembra che i numeri non totienti dispari non dovrebbero esistere, poiché i numeri pari di tale serie sono di forma 6k ± 2 (forme della differenze e delle somme di numeri dispari ed in particolare numeri primi (rispettivamente *numeri primi gemelli e di Polignac*, e di *Goldbach*, con qualche eccezione, per es.: 90=6k)), con k quasi sempre pari, (in tal caso 6k divisibile per 4), e con una certa "preferenza" per + 2, come da seguente **(**e con diversi **k** anche numeri di Fibonacci)

Inoltre, anche perché un prodotto tra un numerari, 6 per un numero k pari o anche dispari è sempre pari, e il risultato, a cui si aggiunge o sottrae 2 , come da forma 6k ± 2 dei numeri nontotienti, è ancora e sempre pari; per cui, non esistono ne possono esistere numeri nontotienti dispari.

Tabella 2

Numeri non totienti	**Forma numerica**	**k pari**	**k dispari**	**note**
14	**6*2 + 2**	**2**		**numero di Fibonacci**
26	6*4 + 2	4	6	
34	6*6 -2	**6**		
38	**6*6 +2**	**6**		
50	6***8** + 2	**8**		**numero di Fibonacci**
62	6*10 +2	10		
68	6*11 +2		**11**	
74	6*12 +2	12		
76	6***13** – 2		**13**	**numero di Fibonacci**
86	6*14 - 2	14		
90	6*15		15	
94	6*16 -2	16		
98	6*16 + 2	16		
114	6*19		19	
118	6*20 - 2	20		
122	6*20 + 2	20		
124	6***21** - 2		**21**	**numero di Fibonacci**
…	**…**	**…**	**…**	
202	6***34 – 2**	**34**		**numero di Fibonacci**
…	**…**	**…**	**…**	

(la sequenza OESIS A005277 si ferma però a 318, e non possiamo vedere se 6***55** $\pm$ 2 = 328 e 332 sono nel seguito della lista dei numeri nontotienti. Nella suddetta tabella 1, mancano i soli valori di k = **3** e **5** numeri di Fibonacci, ma ci sono k = 4 =**3** + 1 e k = 6 = **5** + 1. La serie di Fibonacci sembra quindi essere coinvolta, almeno nella parte iniziale della lista dei numeri nontotienti, con ben cinque **numeri di Fibonacci.** Questa connessione è da approfondire in seguito, controllando se i successivi numeri di forma 6*Fn $\pm$ 2 sono anche, in tutto o in parte, numeri nontotienti.

Relazione tra φ(n) e triangolo di Tartaglia- Funzione φ(n) e triangolo di Tartaglia

```
                          1
                       1     1
                    1     2     1
                 1     3     3     1
              1     4     6     4     1
           1     5    10    10     5     1
        1     6    15    20    15     6     1
     1     7    21    35    35    21     7     1
  1     8    28    56    70    56    28     8     1
1     9    36    84   126   126    84    36     9     1
1    10    45   120   210   252   210   120    45    10     1
1    11    55   165   330   462   462   330   165    55    11     1
1    12    66   220   495   792   924   792   495   220    66    12     1
```

Com’è noto, i numeri triangolari si trovano sulle terze diagonali identiche che dall’alto a sinistra termina a destra o dall’alto a destra terminano a sinistra col numero 66 nell’immagine sopra raffigurata (tratta dalla voce “Triangolo di Tartaglia” di Wikipedia. Tali diagonali sono evidenziate in rosso).

Numeri Noncototienti

Definizione

Un numero intero *n* si definisce **noncototiente** se l'equazione

$$x - \varphi(x) = n$$

non ha soluzioni. In altre parole - dato che la funzione *φ(x)* è definita come il numero degli interi positivi minori di *x* che gli sono coprimi - *n* è un noncototiente solo se non esiste alcun numero intero *x* che, sottratto al numero coprimi minori di se stesso, dia *n*.

È stato congetturato che tutti i numeri noncototienti siano pari; questo deriverebbe da una generalizzazione della congettura di Goldbach.

I primi numeri pari noncototienti sono:

10, 26, 34, 50, 52, 58, 86, 100 , 116, 122, 130, 134, 146, 154, 170, 172, 186, 202, 206, 218, 222, 232, 244, 260, 266, 268, 274, 290, 292, 298, 310, 326, 340, 344, 346, 362, 366, 372, 386, 394, 404, 412, 436, 466, 470, 474, 482, 490, 518, 520 (A005278 dell'OEIS).

Nel 1995 Browkin and Schinzel dimostrarono che l'insieme dei noncototienti è infinito, avendo trovato la funzione

$$f(x) = 2^x \cdot 509203$$

Numeri di Siegel

La formula 2^k * 509203 dà infiniti numeri noncototienti; il numero 509203 è il più piccolo numero di Siegel.

Sequenza OESIS A005278 (graph)

Nella sequenza OESIS A005278 (graph) si vede il "grafico triangolare" dei numeri noncototienti.

10, 26, 34, 50, 52, 58, 86, 100, 116, 122, 130, 134, 146, 154, 170, 172, 186, 202, 206, 218, 222, 232, 244, 260, 266, 268, 274, 290, 292, 298, 310, 326, 340, 344, 346, 362, 366, 372, 386, 394, 404, 412, 436, 466, 470, 474, 482, 490, 518, 520 (list; graph; listen)

Tabella 3 - forme 6k +2 dei numeri noncototienti

Numeri non cototienti	Forma 6k+2	k pari	k dispari	Note
10	6***2** +2	**2**		numero di Fibonacci
26	6 *4 +2	4 =**3** + 1	**3**	
34	6*6 -2	6 =**5** + 1		
50	6***8** -2	**8**		numero di Fibonacci
58	6*10 -2	10		
86	6***14** + 2	**14** =**13**+1		
100	6*17 -2		17	
116	6*19 +2		19	
122	6*20 +2	20		
130	6***22** -2	**22** =**21** +1		
146	6*24 +2	24		
…	…	…	…	…
202	6***34** -2	**34**		numero di Fibonacci
…	…	…	…	…
326	6***54** +2	**54**=**55** – 1		
…	…	…	…	…
340	6*57 – 2		57	

Come si vede, anche qui sembra essere coinvolta la serie di Fibonacci, poiché alcuni valori di k (**2**, **8**, **34)** e di k +1 (**3**, **5**, **13** , **21**, **55**) sono numeri di Fibonacci: è solo un caso?

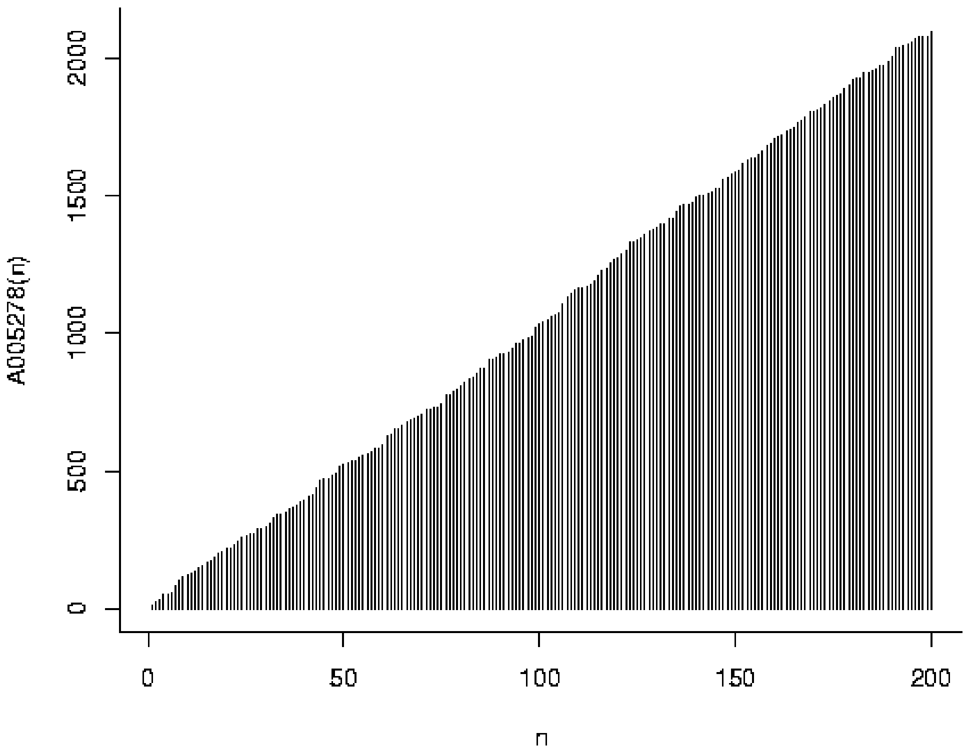
No, in realtà attraverso i numeri di Fibonacci si possono verificare le pseudo-primalità e creare criteri di primalità (vedi [8]).

Qui sotto due grafici sulla funzione totiente, tratti dalle *sequenze OESIS*.

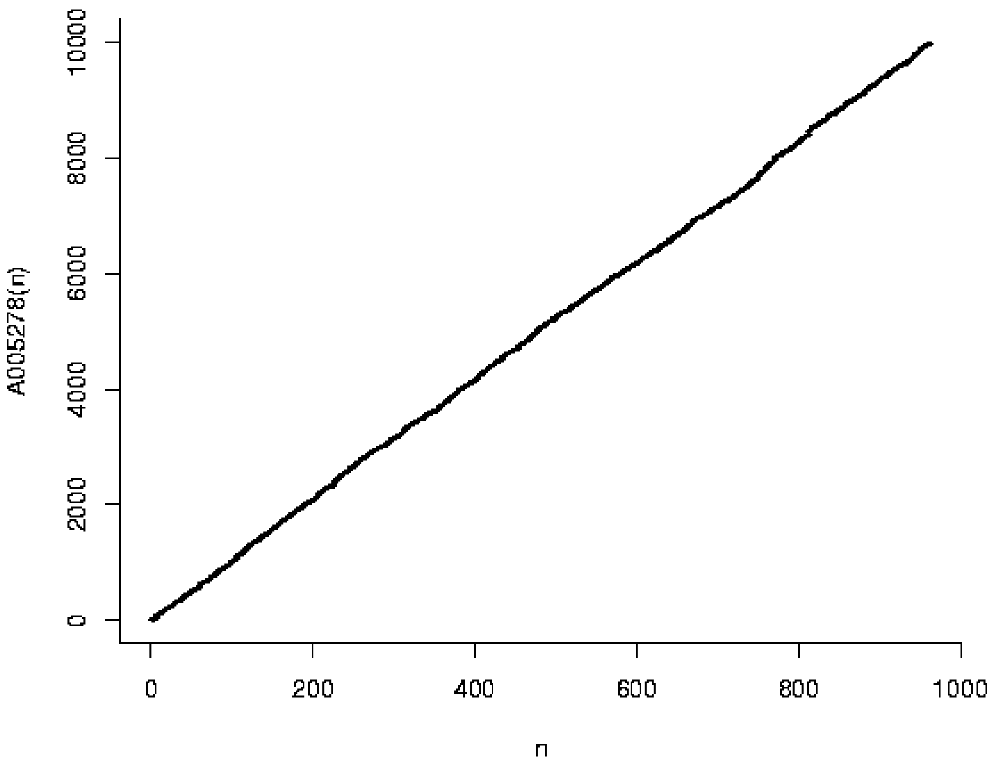
Un link alle sequenze è:

A005278 formatted as a graph:

Pin plot of A005278



Scatterplot of A005278(n)



Proprietà dei numeri noncototienti

Proprietà a

I numeri noncototienti sono numeri pari di forma 6k+2, con k anch'esso pari, con qualche rara eccezione: es. k = 9 per 52 =6*9 – 2.

Proprietà b

le differenze successive tra i numeri noncototienti sono presentate nella tabella 4

Tabella 4

DIFFERENZA	TIPO DI NUMERO
26 – 10 = 16	2^4 potenza di 2
34-26 = 8	2^3 = potenza di 2
50-34 = 16	2^4 …..
52-50 = 2	2^1 …..
58-52 = **6**	**numero perfetto**
86-58 = **28**	**numero perfetto**
100 -86 = 14	**28/2**
116-100= 16	2^4
122 -116 = **6**	**numero perfetto**
130 -122 = 8	2^3
134 – 130 = 4	2^2
146-134= 12	**6***2
154-146= 8	**2^3**
170-154= 16	2^4
172-170 =2	**2^1**
186-172 =14	**28/2**
202-186=16	**2^4**
206-202=4	**2^2**
218-206 =12	**6*2**
222-218= 4	**2^2**
232-222=10	Eccezione né potenza di due né connesso a numeri perfetti.
244-232 = 12	6*2

…

Un altro esempio di differenza = 28 numero perfetto è 518-490 = 28. Ma è ancora tutto da dimostrare come i numeri perfetti 6 e 28 e loro multipli e sottomultipli 12 e 14 siano connessi ai numeri noncototienti e alla funzione φ(n).

Considerazioni sulla proprietà b

Come si nota facilmente, le differenze successive sono:
a) potenze di 2 (la maggior parte)
b) numeri perfetti, 6 e 28, o loro multipli (12) o sottomultipli (14)
c) eccezioni (ancora più rare) per esempio 10

Forma modificata della congettura di Goldbach

E' stato congetturato che tutti i noncototienti sono pari. Questo segue da una "forma modificata della congettura di Goldbach": se un numero pari n può essere rappresentato da una somma di due distinti primi p e q, allora pq – φ(pq) = pq – (p-1)(q-1) = p + q -1 = n-1

Circa la congettura di Goldbach, possiamo osservare che sia i numeri nontotienti sia i numeri noncototienti sono di forma 6k+2 (salvo qualche rarissima eccezione, di forma 6k) e quindi con abbondanza 1, e con il numero minimo di coppie di Goldbach , stimato con la formula logaritmica G(N+2) ~ (N+2) /(ln N)^2; ne consegue che la funzione totiente è connessa maggiormente ai i numeri di forma N = 6k, per i quali essa assume i valori più bassi, contrariamente alla funzione σ(n), connessa alla RH1.

La congettura di Goldbach è notevolmente interessante perché lega molti problemi: i numeri noncototienti e nontotienti, la funzione totiente di Eulero, la fattorizzazione e la GRH (vedi [8]).

Abbondanza di Eulero

Il concetto di abbondanza (rapporto tra il valore della funzione di n ed n), per esempio espressa con σ(n) (vedi [13]), che rappresenta la somma dei divisori di n, è :

$$abb(n) = \sigma(n)/ n$$

da noi esteso anche alla congettura di Goldbach (vedi [3]), potrebbe ora essere esteso anche alla funzione totiente, ma capovolgendo la formula, poiché n è più grande della funzione; quindi:

$$abb(n) = n/\varphi(n)$$

Per esempio abb (24) = 24/φ(24) = 24/8 = 3, mentre l'abbondanza classica per 24 è abb(24) = 36/24 = 1,5 essendo σ(24) = 36 la somma dei divisori di 24 e l'abbondanza di Goldbach abbiamo 3/3 = 1 essendo G(22) = G(24) = G(26) = 3 (ma è un'eccezione iniziale, poiché al crescere di N = 6k G(N) è sempre maggiore di G(N+2), in base alle regole dell'abbondanza di Goldbach.

Quindi anche la funzione abb φ(n) permette di stabilire che i valori minori di φ(n) con n = 6k, sono sulla curva inferiore del grafico comet posto all'inizio di questo lavoro, e i valori massimi (relativi ai numeri primi, di forma 6k+1) si trovano nella curva superiore: proprio l'esatto contrario della funzione Goldbach G(N) e del relativo grafico (vedi [3]).

Esempio per n=24 di forma 6*4;
φ(24) = 8 abb = 3
n = φ(n)* abb = 8*3 = 24

Esempio per n= 28 = 6n -2 = 6*5-2
φ(28)=12 abb = 28/12 = 2,3333…

$n = \varphi(n)*abb = 12*2,3333\ldots = 27,9996 \sim 28$

Occorrerebbe stabilire una relazione con una ipotesi RH – equivalente, i relativi contro esempi ed, eventualmente, dove si potrebbero trovare sul relativo grafico: se cadono fuori da esso, la RH equivalente è vera (e quindi la RH classica) come abbiamo gia visto per la RH1 (Vedi [2]).

Per la RH1 il contro esempio è L(n) < 0 (sull'asse x e sotto l'asse x) mentre il grafico dà sempre L(n) > 0, e sempre più grande al crescere di n , mentre per Goldbach il contro esempio è G(N) = 0 (sull'asse x), e i valori di G(N) se ne allontanano sempre più, in base all'abbondanza di Goldbach (vedi [3]).

Nei numeri noncototienti, sono coinvolti:
a) il numero di Siegel 509203, connesso alle potenze di 2, 2^k
b) ancora le potenze di 2, come molte differenze tra due numeri noncototienti
c) i numeri perfetti 6 e 28 , e i loro multipli e sottomultipli 12 e 14
d) qualche eccezione, come 10, non direttamente connesso a b) e c)

I numeri in generale sembrano godere di moltissime proprietà ma sicuramente una che è di sottofondo a tutte le dinamiche numeriche che popolano il palcoscenico della Teoria dei numeri è una "*RH equivalente generale dei numeri naturali*" (vedi [12]).

Lo studio di numeri totienti, nontotienti, noncototienti è un punto di partenza per comprendere tutte le funzioni aritmetiche: la funzione sigma, la funzione totiente di Eulero, la funzione lambda di Carmichael (vedi [10][11]) e ripercorrere di nuovo la teoria sui numeri di Carmichael, Lucas, Miller, Rabin e molti altri, per poter comprendere le pseudoprimalità dei numeri ed ideare nuovi e migliori test deterministici o probabilistici di primalità o addirittura comprendere nuove tecniche di fattorizzazione. E' un tema tanto caro a Erdos, ad Adelmann, Pomerance e tanti altri.

Inutile dire che tali strade si incrociano, inevitabilmente, anche con la funzione zeta di Riemann e i criteri di Robin e Lagarias. Ovviamente ogni volta che ci si siede davanti ad un problema occorre distinguere l'obiettivo per cui si percorrono tali strade:

- Test di Primalità
- Pseudoprimalità
- Setacci
- Fattorizzazione
- La zeta di Riemamm o le RH equivalenti o la GRH

Ritornando sul tema dell'articolo, ad oggi si conoscono molte definizioni di pseudo-primi; di cui una lista proponibile è la seguente:

pseudoprimo di Carmichael (wikipedia)

pseudoprimo di Eulero (wikipedia)

pseudoprimo Eulero-Jacobi (wikipedia)

pseudoprimo Eulero-Lucas (wikipedia)

pseudoprimo Lucas (wikipedia)

pseudoprimo Frobenius (wikipedia)

pseudoprimo di Perrin Perrin pseudoprime (MathWorld)

pseudoprimo di Somer - Lucas Somer - Lucas pseudoprime (MathWorld)

pseudoprimo ellittico elliptic pseudoprime (MathWorld)

pseudoprimo ellittico forte strong elliptic pseudoprime (MathWorld) pseudoprimo extra forte extra strong Lucas pseudoprime (MathWorld)

pseudoprimo forte strong pseudoprime (MathWorld)

pseudoprimo forte # test del strong pseudoprime test (MathWorld)

pseudoprimo forte di Frobenius strong Frobenius pseudoprime (MathWorld)

pseudoprimo forte di Lucas strong Lucas pseudoprime (MathWorld)

pseudoprimo forte di Rabin - Miller # criterio Rabin - Miller strong (MathWorld)

pseudoprime test (MathWorld)

Non esiste allo stato attuale un lavoro che, da un punto di vista insiemistico, mostri un completo diagramma di Venn di tali pseudo-primalità.

Ad esempio è supposto che la pseudoprimalità di Carmichael è quella che contiene tutte: sicuramente contiene la pseudoprimalità di Fibonacci forte e, in modo disgiunto da questa, la pseudoprimalità di Eulero, che, a sua volta, contiene quella di Eulero - Jacobi.

E per le altre pseudoprimalità che relazione c'è tra loro e quelle di cui si accennava prima? Esistono altre intersezioni o addirittura delle pseudo-primalità che non possono essere di Carmichael?

Si sta correndo il rischio che determinati numeri vengono considerati pseudo-primi ma in realtà sono sicuramente primi?

Progressi ulteriori sui test di primalità si potranno avere solo con approfondimenti sugli aspetti evidenziati prima e che questo articolo ha solo accennato.

Riferimenti

[1] http://it.wikipedia.org/wiki/Funzione_%CF%86_di_Eulero

[2] *"Dai numeri multipli di 6 alla Riemann Hypothesis (i criteri di Robin e Lagarias)"* Rosario Turco, gruppo Eratostene, sul sito **www.gruppoeratostene.com**

[3] *"Abbondanza di Goldbach"*, in sezione "Articoli su Goldbach" sito **www.gruppoeratostene.com**

[4] *Procedure per la formazione delle coppie e delle terne di Goldbach (p + q = N pari ed r + p + q = N' dispari)*

[5] *The Fibonacci's zeta function. Mathematical connections with some sectors of String Theory* Michele Nardelli and Rosario Turco, in sezione "Articoli di Fisica –Matematica sito **www.gruppoeratostene.com**

[6] *Links between string theory and the Riemann's zeta function* Rosario Turco, Maria Colonnese, Michele Nardelli sito **www.gruppoeratostene.com**

[7] *Fibonacci, Dimensioni, Stringhe: nuove interessanti connessioni* Francesco Di Noto e Michele Nardelli sito **www.gruppoeratostene.com**

[8] **http://it.wikipedia.org/wiki/Pseudoprimo_di_Fibonacci**

[9] *Sulle spalle dei giganti* sito **www.gruppoeratostene.com**

[10] http://www.numericana.com/answer/modular.htm#lambda

[11] *Scarabocchi sulla primalità* R. Turco sito **www.gruppoeratostene.com**

[12] *RH equivalente generale dei numeri naturali* R. Turco, M. Colonnese sito **www.gruppoeratostene.com**

[13] http://it.wikipedia.org/wiki/Funzione_sigma