I NUMERI PRIMI GEMELLI E IL NUMERO 30

Gruppo Eratostene

Introduzione

Ci sono tre versioni diverse dell'interessante relazione tra i **numeri primi gemelli** e il **numero 30** (che tra l'altro è il primoriale 5# = 2*3*5 = **30** (incontriamo i primoriali nell' "abbondanza di Goldbach": essi hanno la maggiore abbondanza rispetto agli altri numeri pari, e quindi più coppie di Goldbach (Rif. 1). In questo lavoro esporremo la nostra versione , le altre due versioni sono reperibili nei riferimenti

Rif. 3) e e Rif.4

Le coppie dei numeri primi p' e p'' gemelli sono infatti della forma:

$30\ n + 12 \pm 1$,

$30\ n + 18 \pm 1$

$30\ n + 30 \pm 1$

mentre le forme $30\ n + 6 \pm 1$ (che per n = 0 dà solo 5 e 7, nella forma 6 ± 1), prima coppia di gemelli, che fa eccezione, poiché 5 è primo); $30\ n + 24 \pm 1$ non contengono coppie di gemelli. Per cui, data la forma di un numero primo compresa tra le suddette forme, è possibile prevedere se tale numero può avere un gemello (2°, 3° e 5° colonna della successiva Tabella 1) oppure no (1° e 4° colonna)

Dimostrazione

Pietro Bongo (vedi nota storica sul nostro sito, in sezione "Storia" ha dimostrato che i numeri primi sono tutti (tranne il 2 e il 3) della forma generale

(1) $p = 6n \pm 1$

e che i numeri gemelli si hanno quando entrambe le soluzioni della (1) sono numeri primi.

Per esempio:

per n = 1	6 * 1 – 1 = **5;**	6 * 1 + 1 = **7,**	gemelli **5** e **7**
per n = 2	6 * 2 – 1 = **11**;	6 * 2 + 1 = **13**,	gemelli **11** e **13**
per n = 3	6 * 3 – 1 = **17**;	6 * 3 + 1 = **19**,	gemelli **17** e **19**
per n = 5	6 * 5 – 1 = **29**;	6 * 5 + 1 = **31**,	gemelli **29** e **31**

mentre per

n = 4, 6 * 4 – 1 = 23, 6 * 4 + 1 = 25; 23 è primo, 25 = 5^2 è composto.

I numeri gemelli, come tutti i numeri primi (alcuni detti di Marsenne o di Fermat) sono anche loro della forma

$$p = 6n \pm 1$$

cioè contigui dei multipli di 6, ai quali si sottrae o si aggiunge 1.

La coppia così ottenuta può avere nessuno, uno solo o entrambi i numeri primi, e solo in quest'ultimo caso si dicono gemelli, tranne nel caso di 3 e 5 contigui di 4, (4 – 1 e 4 + 1) ma che dobbiamo escludere dalla (1) e considerare la prima coppia soltanto quella formata da 5 e 7, per la quale n = 1, e quindi, per n = 1:

6 * 1 – 1 = 5, 6 * 1 + 1 = 7 con **5** e 7 gemelli = prima coppia di gemelli

Ora però disponiamo tutti i multipli di 6 in 5 colonne, così composte:

1ª colonna = 30n + 6, con n = 0, 6, 12, 18, 24, 30

2ª colonna = 30 * n + 12

3ª colonna = 30 * n + 18

4ª colonna = 30 * n + 24

5ª colonna = 30 * n + 30

In pratica, con accanto ai numeri 30n + 6m, con m = 1, 2, 3, 4, 5, i primi (in alto a destra o a sinistra) contigui, e cioè (30n+6±1, 30+12±1, 30+18±1, 30+24±1, 30+30±1:

TABELLA 1

1ª	**2ª**	**3ª**	**4ª**	**5ª**
5 6 7	**11** 12 **13**	**17** 18 **19**	23 24	**29** 30 **31**
36 37	**41** 42 **43**	47 48	53 54	**59** 60 **61**
66 67	**71** 72 **73**	78 79	83 84	89 90
96 97	**101** 102 **103**	**107** 108 **109**	113 114	**120**
126 127	131 132	**137** 138 **139**	**144**	**149** 150 **151**
156 157	162 163	167 168	173 174	**179** 180 **181**
186	**191** 192 **193**	**197** 198 **199**	**204**	210 211
216	222 223	**227** 228 **229**	233 234	**239** 240 **241**
246	251 252	257 258	263 264	**269** 270 **271**
276 277	**281** 282 **283**	**288**	293 294	**300**

…		…		…		…		…

Con una media di 17/3 = 5,66 ~ 6 coppie di gemelli (evidenziate in **rosso**) per ogni colonna che li contiene (2°, 3° e 5°), mentre nelle altre colonne ci sono sette numeri primi a destra (1° colonna) e otto numeri primi a sinistra (4° colonna)

(Alcuni numeri come **120, 144, 186, 216, 246, 288 e 300** non hanno però numeri primi ne a destra ne a sinistra, e per questo li chiameremo “sterili”)

A sinistra di ogni multiplo di 6 ci sono cioè i numeri primi della forma 6n – 1, e a destra quelli della forma 6n + 1; a sinistra e a destra, dello stesso numero abbiamo pertanto le coppie di gemelli.

I multipli della prima colonna, come si nota, danno primi soltanto a destra (6n + 1) tranne nel primo caso eccezionale – per n = 1 – che dà origine alla coppia di gemelli 5 e 7.

I rimanenti sono numeri “sterili” a sinistra; infatti, si hanno tutti numeri dispari composti terminanti per 5, (5 * n + 6 – 1) quindi multipli di 5, ed eliminati con il crivello di Eratostene.

I numeri della 2ª, 3ª e 5ª colonna danno numeri primi sia a destra che a sinistra e quindi solo in queste colonne, rispettivamente dalla forma 30 * n +12, 30 * n +18 e 30 * n + 30 si possono trovare le coppie di numeri gemelli (e quindi sono multipli di 6 “gemellari”).

I numeri della 4ª colonna (30n + 24) danno numeri primi soltanto a sinistra (unipari a sinistra a differenza di quelli della 1ª colonna, unipari a destra); nella 4ª colonna, infatti i multipli di 5 sono a destra, e della forma 30 * n + 24 + 1.

Fatte queste semplici osservazioni, e premesso che ci sono, in ogni colonna, dei numeri sterili (evidenziati in **blu)** con composti sia a destra che a sinistra) si può stabilire, dato un numero primo p anche grande, (senza disporre della tavola dei numeri primi) la colonna al quale appartiene, e quindi se può avere un gemello p' della forma 6n ± 1 oppure p ± 2, oppure no: nel primo caso non è certa, mentre nel secondo caso l'esclusione del gemello è certa.

Si sottrae o aggiunge 1 al numero primo in esame, si divide il risultato per 30 e si osserva il resto, che può essere 6, 12, 18, 24, oppure 0; solo nel 2°, 3° o 5° caso p potrebbe avere un gemello p' = p ± 2; come potrebbe anche non averlo, per via della presenza di numeri unipari oltre che sterili nella stessa colonna, insieme alle coppie di gemelli; mentre nel 1° e nel 4° caso, la presenza di un gemello è invece da escludere con assoluta certezza, essendo, come già visto, tutti i numeri di queste colonne (tranne il 6 della prima colonna, per n = 0, 30*0 + 6 = 0 + 6 = 6) unipari rispettivamente solo a destra e a sinistra, oppure "sterili".

Per esempio:

$$p = 233$$

$$n = \frac{233 - 1}{30} = \frac{232}{30} = 7 \text{ con il resto di } \underline{12}$$

$$n = \frac{233 + 1}{30} = \frac{234}{30} = 7 \text{ con il resto di } \underline{14}$$

La seconda possibilità è da scartare, poiché il resto 14 non è compreso tra le cinque forme, quindi rimane la prima possibilità

$$30n + 12$$

che appartiene alla 4ª colonna, unipara a sinistra e quindi senza coppia di gemelli; per cui il numero p è "figlio unico".

Per p =349, invece, $n = \frac{349-1}{30} = \frac{348}{30} = 30 * 11 + 18$

p appartiene alla 3ª colonna, che genera gemelli, e infatti 349 – 2 = 347, gemello di 349.

Infatti $\frac{348}{6} \pm 1 = 58 * 6 \pm 1 =$ **347** e **349**,

entrambi primi e gemelli, e originati da $6\,n \pm 1 = 6 * 58 \pm 1$;

p = 204 = 30 n + 24 = 30 * 6 + 24 invece è sterile, in quanto i contigui ± 1 = 203 e 205 sono composti:

$$203 = 7 * 29 \text{ e } 205 = 5 * 41$$

Riepilogando: coppie di gemelli solo nella 2ª, 3ª e 5ª colonna mentre nella 1ª colonna (tranne il 6 iniziale) e nella 3ª colonna ci sono solo unipari e sterili, cosa che autorizza l'esclusione assoluta di coppie di gemelli, le cui forme

$30\,n + 12 \pm 1$ $\qquad$ $30\,n + 18 \pm 1$ $\qquad$ $30\,n + 30 \pm 1$

sono più precise della forma generale

$$6\,n \pm 1$$

ma ad essa riconducibili e comune a tutti i numeri primi (tranne il 2 e il 3), gemelli o no che fossero.

Nella prima colonna, si osserva che i numeri dispari generati a sinistra sono, nell'ordine, i prodotti di 5 per tutte le forme (6 n + 1), cioè i numeri della 4ª colonna del teorema n° 1 e cioè 7, 13, 19, 25, ecc…e quindi la 1ª colonna di questo teorema

5 (6 n + 1)

mentre viceversa, i numeri dispari a destra della 4ª colonna di questo teorema n° 2, sono prodotti di tipo

5 (6 n – 1)

e cioè 5, 11, 17, 23, ,29, 35, 41 ecc…

in pratica

1ª colonna (30 n + 6)		2ª colonna (30 n + 24)	
1 * 5 + 1 =	5 + 1 ← = 6	24 + 1 = 25 =	5 * 5
7 * 5 + 1 =	35 + 1 ← = 36	54 + 1 = 55 =	5 * 11
13 * 5+ 1 =	65 + 1 ← = 66	84 + 1 = 85 =	5 * 17
19 * 5 + 1 =	95 + 1 ← = 96	114 + 1 = 115 =	5 * 23
25 * 5←	125 + 1← =126	144 + 1 = 145 =	5 * 29
31 * 5←	155 + 1← = 156	174 + 1 = 175 =	5 * 35

Vediamo ora la 2ª colonna, 30 n +12 = 30 +11 +1

11 + 1 = 12 + 1 = 13 = p

41 + 1 = 42 + 1= 43 = p

71 + 1 = 72 + 1= 73 = p

101 + 1 = 102 + 1= 103 = p

131 + 1 = 132 + 1= 133 = 7 * 19

161 + 1 = 162 + 1=163 =7 * 23

191 + 1 = 192 + 1= 193 = 13 * 7

221 + 1 = 222 + 1 = 223 = p

251 + 1 = 252 + 1=253 = 11 * 23

.

Si hanno numeri primi p sia a destra che a sinistra (30n + 12 + 1 e 30n +12 – 1) e composti p * q sempre crescenti e il cui prodotto finisce sempre con 1 e con 3. Analogamente, nella 3ª colonna i composti finiscono sempre con il 7 a sinistra e con il 9 a destra, ecc…

Più in generale: dato un qualsiasi numero p, e disponendo tutti i multipli 6n di 6 in p colonne, solo due di esse non contengono gemelli, perché i multipli 6n – 1 di una di queste due colonne, e i multipli 6n + 1 dell'altra, sono multipli p (6n – 1) e p (6n + 1) anche di p, analogamente a come si è visto per p = 5, e quindi 5 colonne considerate per la dimostrazione di questo teorema . Solo le altre p – 2 colonne generano coppie di gemelli, oltre che numeri primi e composti.

Per es. per p = 7 **(ma qui i numerini blu in alto a destra non debbono ovviamente considerarsi come potenze, ma come 6n + 1, e quindi 7 =6+1, 49=48+1)**

1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°
6^{7}	12	18	24	30	$^{35}36$	42
48^{49}	54	60	66	72	$^{77}78$	84
90^{91}	96	102	108	114	$^{119}120$	126
…	…	…	…	…	…	…

Solo la 1ª colonna genera a destra multipli di 7 (7, 49, 91 ecc…) e la 6ª colonna ma a sinistra (35, 77, 119), e quindi sono esenti da coppie di gemelli, a differenza delle altre cinque colonne.

Circa infine il numero g(N) delle coppie di gemelli fino ad un dato N, della tabella dei numeri primi, si nota che fino a:

$N = 10^1$, g(10) = 2 (3 e 5, 5 e 7)

$N = 10^2$, g(100)= 8;

$N = 10^3$, g(1000) = 35;

$N = 10^4$, g(10 000) = 205;

… … … ….

(Rif.2)

Anche una qualsiasi coppia di gemelli è una coppia di Goldbach, e precisamente l'ultima coppia , infatti:

$N/2 \pm 1$ per molti N multipli di 12

poiché (6n-1) + (6n+1) = 6n – 1 + 6n + 1 = 6n + 6n = 12n

Conclusione

La relazione tra i numeri gemelli e il numero 30 ha quindi tre versioni diverse, tutte riportate in questo lavoro, e ognuna aggiunge qualcosa alle precedenti, o le vede da punti di vista diversi. Noi aggiungiamo anche la relazione tra i numeri gemelli e le coppie di Goldbach, riportata in blu nella pagina precedente, a conferma che in matematica, e soprattutto in Teoria dei numeri, tutto è connesso.

Riferimenti

1) "L'abbondanza di Goldbach" in sezione "Articoli su Goldbach", sul nostro sito www.gruppoeratostene.com

2) "Breve nota sui Numeri Gemelli" dell'Ing. Cristiano Teodoro, in sezione "Articoli sui Numeri Primi", idem.

3) Ing. Rosario Turco, prof. Maria Colonnese, "Forme generatrici di numeri primi" in http://mathbuildingclockspot.com/ :

forme generatrici di numeri primi - dimostrazione di infinità di **...**

di cui riportiamo il titolo e un breve abstract

"26 Ott 2008
in realtà esistono diverse **forme generatrici di numeri primi**, a varie velocità e con varie forme: lineari, paraboliche, ellittiche etc. alcune di queste forme sono euleriane, altre non euleriane; ad esempio eulero scoprì una forma ...

http://mathbuildingblock.blogspot.com/

ritagliato da Google - 7/2010"

Riportiamo qui solo il brano interessato al numero 30:

"Se dalla (1) si sceglie m=30 (operiamo in modulo 30), allora esistono solo 8 classi con

m=30 che danno tutti i numeri primi (esclusi 2,3,5): 30k + 1, 30k + 7, 30k + 11, 30k + 13,

30k + 17, 30k + 19, 30k + 23, 30k + 29

La cui implementazione con WinHugs può essere del tipo:

```
fgp30-1 n = [ x | k<-[0..p], x<-[1..p], x==30*k+1, isprime x ]
fgp30-7 n = [ x | k<-[0..p], x<-[1..p], x==30*k+7, isprime x ]
fgp30-11 n = [ x | k<-[0..p], x<-[1..p], x==30*k+11, isprime x ]
fgp30-13 n = [ x | k<-[0..p], x<-[1..p], x==30*k+13, isprime x ]
fgp30-17 n = [ x | k<-[0..p], x<-[1..p], x==30*k+17, isprime x ]
fgp30-19 n = [ x | k<-[0..p], x<-[1..p], x==30*k+19, isprime x ]
fgp30-23 n = [ x | k<-[0..p], x<-[1..p], x==30*k+23, isprime x ]
fgp30-29 n = [ x | k<-[0..p], x<-[1..p], x==30*k+29, isprime x ]
```

I risultati ottenibili sono quindi:

```
Main> fgp30-1 1000
[31,61,151,181,211,241,271,331,421,541,571,601,631,661,691,751,811,991"
```

Dal link http://150.146.3.132/637/01/RTC01.pdf.pdf

4) Voce di Wikipedia "Primzahlzwilling" in lingua tedesca

(numeri primi gemelli). Riportiamo qualche brano:

“Mit Ausnahme von $n=1$ ist die letzte Ziffer eines n eine 0, 2, 3, 5, 7 oder eine 8, da im anderen Fall eine der beiden Zahlen $6n-1$ bzw. $6n+1$ durch 5 teilbar und damit keine Primzahl wäre.

Mit einer ganzen Zahl n lässt sich jede ungerade Zahl in der Form $30n+1$, $30n+3$, $30n+5$, $30n+7$, ..., $30n+25$, $30n+27$, $30n+29$ (letztere auch als $30n-1$) darstellen. Primzahlen (außer 3 und 5) sind aber nie von einer der 7 Formen $30n+3$, $30n+5$, $30n+9$, $30n+15$, $30n+21$, $30n+25$ und $30n+27$, da Zahlen dieser 7 Formen stets durch 3 oder durch 5 teilbar sind.

Daher hat jedes Primzahlzwillingspaar (außer (3,5) und (5,7)) mit einer ganzen Zahl n genau eine der drei Formen

$(30n-1, 30n+1)$, $(30n+11, 30n+13)$, $(30n+17, 30n+19)$

bzw. die letztere Darstellung, um die Symmetrie zu <u>$(30n+11$</u>, $30n+13)$ zu verdeutlichen, alternativ geschrieben als $(30n-13$, <u>$30n-11)$</u>“.

La sottolineatura è nostra, vedi righe successive, sulla sostanziale identità tra le tre relazioni.

La nostra relazione si basa invece sulle forme 30n+6, 30n+12, 30n+18, 30n+24, 30n+30 = 30(n+1)…, ma aggiungendo o togliendo 1 a questi numeri, e ± al segno +, si ritorna alle relazioni precedenti; per esempio:

$30n \pm 12 \pm 1 = 30n + 12 - 1 = 30n + 11$, e il simmetrico $30n - 12\ \ 1 = 30n - 11$

(vedi ultime due righe della relazione sulla suddetta voce tedesca “Primzahlzwilling”

Caltanissetta 1.9.2010