Le partizioni di un numero in matematica e in natura
(possibili connessioni con i numeri triangolari T)

oooooooooooooooo

Gruppo Eratostene

Abstract

In this paper we show some connections between partition of numbers with Lie numbers and Fibonacci numbers

Riassunto

In questo lavoro prendiamo in considerazione la funzione p(n), detta anche funzione di partizione, sia dal punto di vista matematico che naturale (le partizioni sono presenti in natura quasi come la serie di Fibonacci)

Da Wolfram Mathworld riportiamo brevemente la definizione della funzione di partizione, per poi passare ad altre citazioni e alle nostre considerazioni matematiche, e infine al suo coinvolgimento in alcuni fenomeni naturali :

Funzione di partizione P

DOWNLOAD Mathematica Notebook CONTRIBUTE To this Entry

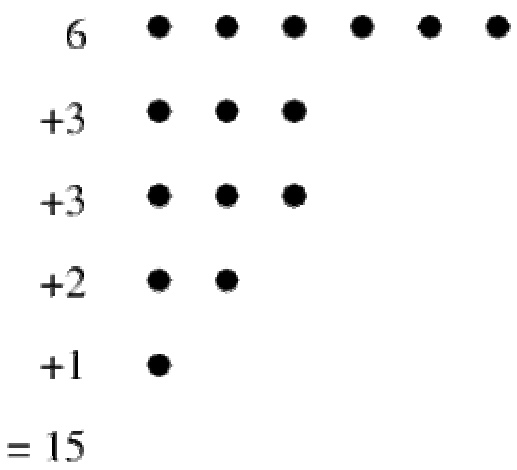
$P(n)$, A volte anche denotato $p(n)$ (Abramowitz e Stegun 1972, p. 825; Comtet 1974, p. 94; Hardy e Wright 1979, p. 273; Conway e Guy 1996, p. 94; Andrews 1998, p. 1), dà il numero di modi di scrivere il numero intero n come somma di numeri interi positivi , in cui l'ordine di addendi non è considerato significativo. Per convenzione, le partizioni sono di solito classificati in ordine dal più grande al più piccolo (Skiena 1990, p. 51). Ad esempio, dal 4 può essere scritto

$$\begin{aligned} 4 &= 4 \\ &= 3+1 \\ &= 2+2 \\ &= 2+1+1 \\ &= 1+1+1+1, \end{aligned}$$

ne consegue che $P(4)=5$. $P(n)$ è talvolta chiamato il numero di partizioni senza restrizioni, ed è attuato in *Mathematica* come `PartitionsP` *[n]* o `NumberOfPartitions` *[n]* nel *Mathematica* pacchetto `Combinatorica` ».

I valori di $P(n)$ per $n=1$, 2, ..., sono 1, 2, 3, 5, 7, 11, 15, 22, 30, 42, ... (Sloane A000041). I valori di $P(10^n)$ per $n=0$, 1, ... sono date da 1, 42, 190.569.292, 24061467864032622473692149727991, ... (Sloane A070177).

Il primo pochi valori primi di $P(n)$ sono 2, 3, 5, 7, 11, 101, 17.977, 10.619.863, ... (Sloane A049575), corrispondenti a indici 2, 3, 4, 5, 6, 13, 36, 77, 132, ... (Sloane A046063). Il più grande n dando un primo provata a partire da aprile 2010 è $n=29\,099\,391$, Che ha 6.002 cifre decimali (http://primes.utm.edu/top20/page.php?id=54 # record).



Quando elencando esplicitamente le partizioni di un numero n , La forma più semplice è la cosiddetta *rappresentazione* così *naturale* che dà semplicemente la sequenza di numeri nella rappresentazione (ad esempio, (2, 1, 1) per il numero $4 = 2 + 1 + 1$). La *rappresentazione molteplicità* dà invece il numero di volte ogni numero è presente insieme a quel numero (ad esempio, (2, 1), (1, 2) per $4 = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2$). Il diagramma Ferrers è una rappresentazione pittorica di una partizione. Ad esempio, il diagramma in alto mostra il diagramma Ferrers della partizione $6 + 3 + 3 + 2 + 1 = 15$.

Eulero diede una funzione generatrice di $P(n)$ utilizzando la serie *q*-

$$
\begin{aligned}
(q)_\infty &\equiv \prod_{m=1}^{\infty}(1-q^m) \\
&= \sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{n(3n+1)/2} \\
&= 1 - q - q^2 + q^5 + q^7 - q^{12} - q^{15} + q^{22} + q^{26} + \ldots
\end{aligned}
$$

Qui, gli esponenti sono generalizzate pentagonale numeri 0, 1, 2, 5, 7, 12, 15, 22, 26, 35, ... (Sloane A001318) e il segno della k termine th (contando 0 come termine 0a) è $(-1)^{\lfloor (k+1)/2 \rfloor}$ (Con $\lfloor x \rfloor$ la funzione di pavimento).

Poi la partizione di numeri $P(n)$ sono date dalla funzione generatrice

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{(q)_\infty} &= \sum_{n=0}^{\infty} P(n) q^n \\
&= 1 + q + 2q^2 + 3q^3 + 5q^4 + \ldots
\end{aligned}
$$

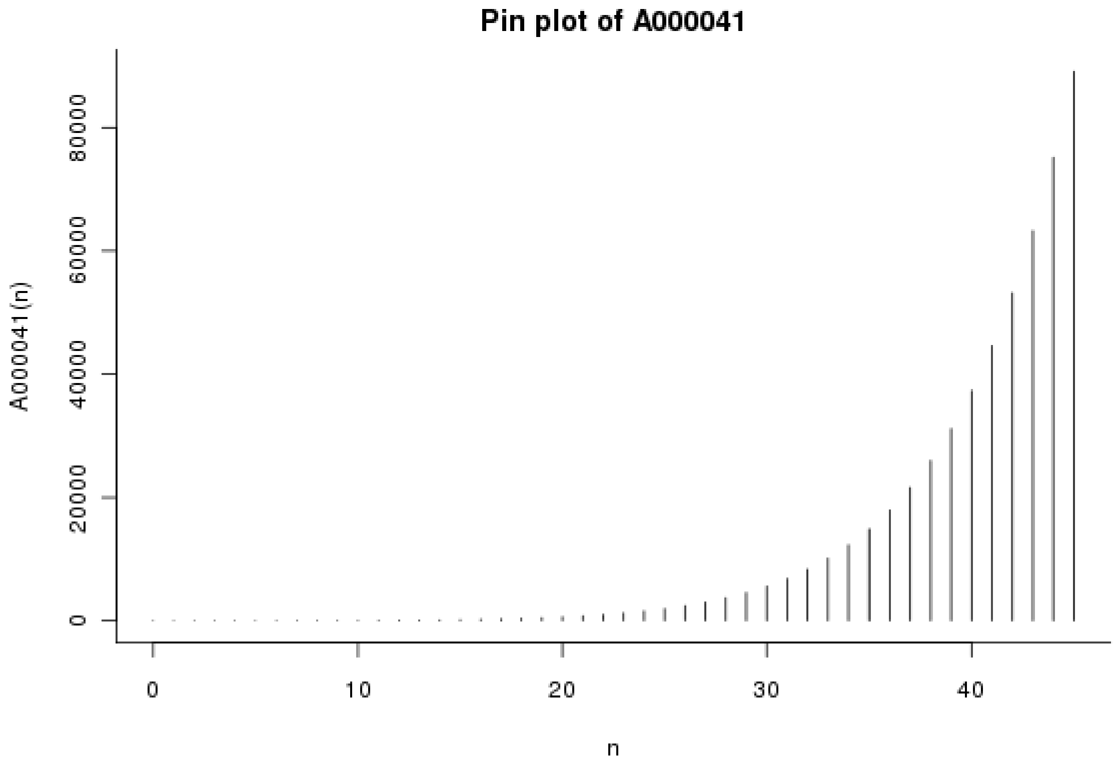
(Hirschhorn 1999)”.

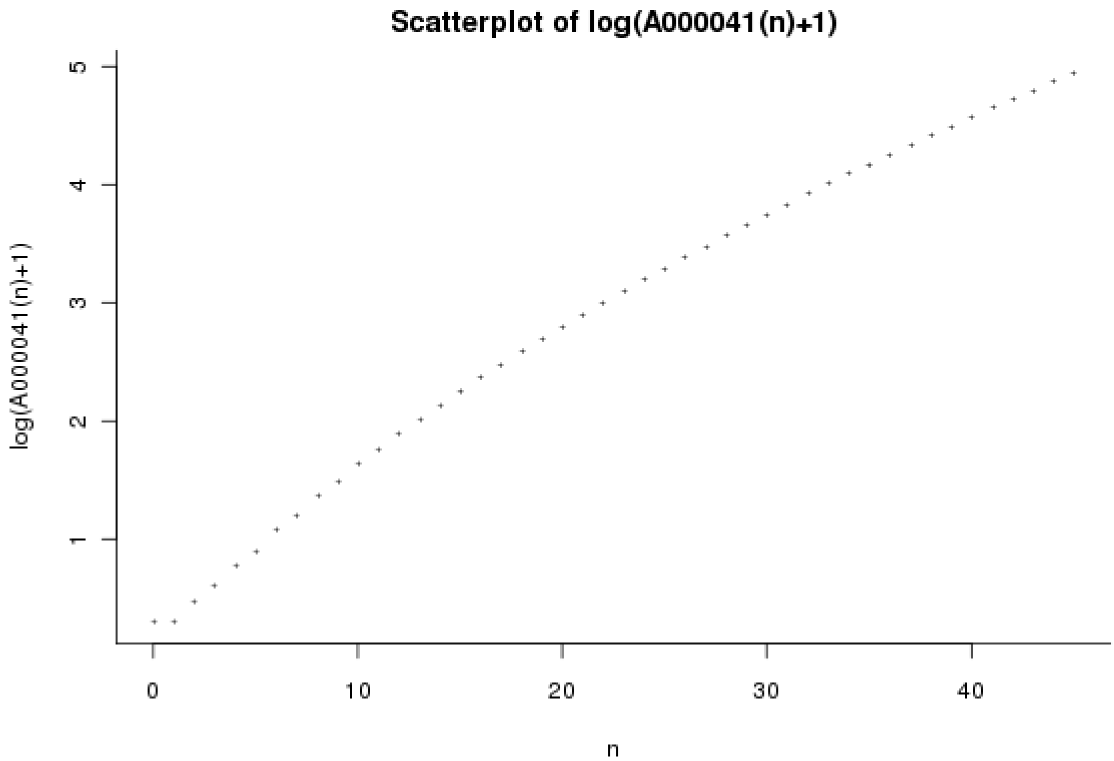
Per il resto si rimanda alla voce di Wolfram MathWorld. Qui ci interessa maggiormente la serie dei numeri di Partizioni (Sloane A000041) e la sua relazione con alcuni fenomeni naturali:

A000041	a (n) = numero di partizioni di n (i numeri delle partizioni). (Formerly M0663 N0244)

1, 1, 2, 3, 5, 7, 11, 15, 22, 30, 42, 56, 77, 101, 135, 176, 231, 297, 385, 490, 627, 792, 1002, 1255, 1575, 1958, 2436, 3010, 3718, 4565, 5604, 6.842, 8.349, 10.143, 12.310, 14.883, 17.977, 21.637, 26.015, 31.185, 37.338, 44.583, 53.174, 63.261, 75.175, 89.134 con grafico:

A000041 come un grafico:





Qui riportiamo parzialmente l'articolo"Partizioni di un intero"dal sito http://www2.dm.unito.it/pagineper...

PARTIZIONI DI UN INTERO

relazione per il laboratorio di combinatorica

Daniele P. Morelli
283938
:: Introduzione ::
Definiamo partizione di un numero intero positivo n una scomposizione (indipendente dall'ordine) in cui si può esprimere n come somma di interi positivi.
Per poter visualizzare una singola partizione di un certo numero in modo immediato, si possono utilizzare i diagrammi di Ferrers, ossia raffigurazioni del tipo seguente

OOOO
OOO
O

L'esempio riportato corrisponde alla partizione 8=4+3+1
Ancora a titolo d'esempio, possiamo vedere che le possibili partizioni di 4 sono:
4=1+1+1+1 4=2+1+1 4=2+2 4=3+1 4=4
Indicato con $p(n)$ il numero di partizioni di n, abbiamo qui che $p(4)=5$. La seguente sequenza (avendo convenzionalmente posto $p(0)=1$) è data dai primi valori di $p(n)$ per n che va da 0 a 15: 1, 1, 2, 3, 5, 7, 11, 15, 22, 30, 42, 56, 77, 101, 135, 176....
Studieremo dunque tale funzione e, nel farlo, richiameremo anche diverse sue applicazioni e proprietà, nonchè alcuni risultati ottenuti da vari matematici nel corso della storia.
La questione di trovare il numero di partizioni di un insieme di oggetti può essere intesa in vari modi. A seconda che si decida di considerare distinguibili gli oggetti e/o le parti in cui si raggruppano tali oggetti, si ottengono problemi diversi.
Più in generale il problema può essere quella di partizionare, ad esempio:
A - n oggetti indistinguibili in parti indistinguibili;
B - n oggetti distinguibili in parti indistinguibili;
C - n oggetti indistinguibili in parti distinguibili;
D - n oggetti distinguibili in parti distinguibili;
E - n oggetti distinguibili in un numero fissato m di parti indistinguibili;
etc...
Se gli elementi sono distinguibili, parleremo di partizioni “etichettate” (inglese *labeled*).In questo scritto ci occuperemo principalmente del problema A. I problemi B ed E sono notevoli in quanto danno origine a sequenze “celebri” di numeri interi (interi di Bell e di Stirling)…. ”

Per il resto si rimanda alla fonte.

Questa la parte matematica. Vediamo ora il coinvolgimento delle partizioni in natura.

Da “L’EQUAZIONE PREFERITA DELLA NATURA: n^2 + n + 1 (con n primo)(alla base de numeri e dei gruppi di Lie, dei numeri”di Fibonacci, delle partizioni di numeri, delle simmetrie e delle teorie di stringa)",

Francesco Di Noto, MicheleNardelli (Rif.1) (in Sezione "Articoli"

sotttosezione "Articoli di Fisica Matematica" del nostro sito

www.gruppoeratostene.com :

…

"Terzo paragrafo: le partizioni di numeri

Un'altra serie numerica presente in natura è quella delle partizioni di un numero,

p(n), cioè il numero dei modi in cui un

numero n può essere scritto come somma di numeri precedenti; per esempio 5 si può

scrivere come:

5 = 5 + 0
5 = 4 + 1
5 = 3 + 2
5 = 3 + 1 + 1
5 = 2 + 2 + 1
5 = 2 + 1 + 1 + 1
5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1

cioè in sette modi diversi; e quindi possiamo dire che p(n) = p(5) = 7

Tali partizioni di numeri "**spuntano nel mondo fisico quasi con la stessa frequenza dei numeri di Fibonacci**" (Marcus Du Sautoy, "L'enigma dei numeri primi ", Rizzoli, pag. 261).

Anche qui, come si vede, si tratta di somme, il modo preferito dalla natura per determinare i numeri con cui regolare, in senso strettamente pitagorico, i suoi numerosi fenomeni.

TABELLA 3

n 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 …

p(n) 1 2 3 5 7 11 15 22 30 42 …

(p(n) in colore rosso) intorno a 2n

(STRISCIA NUMERICA DELLE SIMMETRIE)

n	2n-3	2n-2	2n-1	**2n**	**2n+1**	2 n+2	2n + 3			(2n+6)
1	-1	0	**1**	**2**	**3**	4	**5**			
2	1	***2***	***3***	4	**5**	6	**7**			
3	***3***	4	**5**	6	**7**	8	9			
4	***5***	6	**7**	8	9	10	**11**			
5	***7***	8	9	10	**11**	12	13			
6	9	10	***11***	12	**13**	14	**15**			
7	11	12	13	14	***15***	16	17			
8	13	14	***15***	16	17	18	19	20	**21**	**22**

9 … … … … … … … … … …

10 … … … … … … … … …

… … … … … … … … … … … … …

In ***corsivo*** i doppioni nella striscia numerica a sinistra di **2n**

TABELLA 4

(in base a 2T +1; in blu, i numeri p(n), sottolineati e in verde (anche se sono

anche p(n), i numeri di Witten, vedi in seguito)

T	**2T-3**	**2T-2**	**2T-1**	**2T**	**2T+1**	**2T+2**	**2T+3**	**(2T +4)**
1	**-1**	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	
3	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	
6	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**
10	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	
15	**27**	**28**	**29**	**30**	**31**	**32**	**33**	
21	**39**	**40**	**41**	**42**	**43**	**44**	**45**	
28	**53**	**54**	**55**	**56**	**57**	**58**	**59**	

… … … … … … … …

Come si vede, le partizioni di numeri p(n) più piccoli (quelli che interessano alla natura (come i numeri più piccoli di Fibonacci, fino a 144) si trovano sulla striscia numerica da 2T-3 a 2T+3, e alcuni (2, 30 e 42) sono sulla colonna 2T. Gli altri valori più grandi invece si allontanano sempre più da tale striscia, e forse la natura non li usa più per i suoi fenomeni, analogamente ai numeri di Fibonacci più grandi di 144 (analogamente, i numeri primi usati per i numeri di Lie e i gruppi di Lie sono 2, 3, 5, e 7.

Come si vede, i numeri di partizione più piccoli 1, 1, 2, 3, 5, 7, 11, 22, 30, 42 e 56,con eccezione di 15),rientrano tutti nella striscia numerica compresa tra 2T-2 e 2T+2 , mentre quelli un po' più grandi: 77, 101, 135, 176, tendono ad uscirne fuori sempre più.

Ma i più piccoli potrebbero essere quelli presenti in natura, come accade anche per i numeri di Fibonacci, ed entrambi quindi **conservano le simmetrie dei numeri 2T+1**, e legate ai numeri di Lie più piccoli (7, 13, 31).

Essi sono coinvolti anche in fenomeni fisici: un esempio nell'articolo sottoindicato del Dott. Nardelli sui numeri di Witten:

Numeri di Witten: **2, 4, 7, 8, 14, 16, 21, 32,** 105, 154, 175, 256, 945, 4096, 8085, 10493, 74247, 363825 : fino a 32, giacciono sulla striscia numerica da 2T-3 a 2T+3, con l'eccezione di 16 (di forma 2T+4).

Quindi hanno anche loro una loro connessione, sebbene più tenue, con i numeri triangolari T e i numeri di Lie 2T+1 (i numeri di Witten **7** e **21** sono anche numeri di Lie). I numeri di Witten sono accennati nel lavoro del Dott. Michele Nardelli " On the physical interpretation of the Riemann zeta function, the Rigid

Surface Operators in Gauge Theory, the adeles and ideles groups applied to various formulae regarding the Riemann zeta function and the Selberg trace formula, padic strings, zeta strings and p-adic cosmology and mathematical connections

with some sectors of String Theory and Number Theory" :

2, 4, 7, 8, 14, 16, 21, 32, 105, 154, 175, 256, 945, 4096, 8085, 10493, 74247, 363825

e con segnati in rosso le potenze di 2 (tra i quali quattro quadrati, sottolineati; nei numeri di Lie non ci sono assolutamente quadrati, essendo essi sempre a metà strada tra un quadrato e il successivo; e tra i numeri di Fibonacci solo 1 e 144 sono quadrati). Gli esponenti di 2 sono, nell'ordine: **1, 2, 3, 4, 5, 8 ,12** con ***1, 2, 3, 5, 8*** numeri di Fibonacci, e 12 ≈ ***13*** successivo ed altro numero di Fibonacci. Si ritorna così alla serie di Fibonacci e alle simmetrie, che si rispecchiano parzialmente anche nelle partizioni di numeri e nei numeri di Witten.

Ulteriore confronto tra numeri di Witten e partizioni:

p(n):	1	2	3	5	7		11	15		22	30 …	
n.di Witten:		**2**		**4**	**7**			**14**	**16**			**32…**

Come si vede, numeri di partizione e numeri di Witten sono molto vicini (2 e 7 coincidono), almeno nella parte iniziale, proprio quella che interessa alla Natura (per i numeri primi n della formula n^2 + n + 1 ha scelto infatti 2, 3, 5, 7, e per i numeri di Fibonacci si ferma a 144: non si conoscono ancora fenomeni in cui vengono coinvolti numeri di Fibonacci maggiori di 144, numero di semi in una corolla di girasole)"

Conclusione

Come abbiamo visto, anche le partizioni di numeri, come pure i numeri di Fibonacci sono una leggera variante dei numeri di Lie $L(n) = n^2 + n + 1 = 2T+1$ (l'equazione preferita dalla natura) con T numeri triangolari e 2T somma dei primi n numeri pari: l'addizione è evidentemente l'operazione preferita in natura: già è presente nella suddetta equazione e inoltre:

a) nei numeri di Lie si **sommano** n numeri pari consecutivi e si aggiunge 1; per esempio, $2 + 4 + 6 + 8 + 1 = 21 = 4^2 + 4 + 1 = L(4)$

b) nei numeri di Fibonacci si **sommano** due numeri della serie per ottenere il numero di Fibonacci successivo; per esempio, $8 + 13 = 21$

c) nelle partizioni, ogni partizione di n è una **somma** di numeri più piccoli precedenti per es. una delle sette partizioni di 5 è $2+1+1+1$, infatti $p(5) = 7$

Tuttavia , nonostante tale semplicità aritmetica di base, tutte e tre le serie numeriche sono molto importanti in natura, e tutte e tre si possono rappresentare geometricamente come parabole quasi sovrapposte (quella di Fibonacci , Rif.2, e quella delle partizioni sono leggermente più larghe di quella dei numeri di Lie $L(n) = 2T+1$ che genera, con i suoi piccoli multipli, i numeri dei dimensioni dei Gruppi di Lie, e relative simmetrie, sulle quali si basano infine il Modello Standard e le teorie di stringa, e queste ultime hanno connessioni con la sezione aurea e quindi con la serie di Fibonacci.

Riferimenti

1)"L'equazione preferita dalla natura" in sezione "Articoli di Fisica Matematica"

2) “PGTS” parte prima e parte seconda, idem