La congettura di Polignac (1849)

di Guido Carolla[1]

Sunto. Con il presente articolo che trae l'avvio dal già noto teorema 1 [9], l'autore sotto forma di un rivisitato estratto propone una risoluzione elementare[2] della congettura di Polignac non prima di aver dato le risposte alle domande conclusive.

1.Teorema . Il numero dei "pari" n compresi tra due numeri primi qualunque p_h e p_k è dato dalla semidifferenza tra gli stessi $n = \dfrac{p_k - p_h}{2}$. (1.1)

Pertanto, siano $\forall h,k \in N_0$ con $h \le k$, $n \in N$, $p_h, p_k \in \{p : numero \ \ primo\}$.

Si dà la dimostrazione per via deduttiva, partendo dall'ipotesi che tra i numeri primi p_h e p_k vi possano essere alcuni numeri naturali pari indicati con m_i, *i=1, 2, 3, ..., n ,* infatti, si osserva che essi sono termini di una progressione aritmetica (di ragione *r=2*), della quale i termini estremi, cioè il primo e l'ultimo sono:

$$m_1 = p_h + 1, \ \ m_n = p_k - 1. \qquad (1.2)$$

Essendo noto che in una progressione aritmetica di ragione $r = 2$, il termine *n*.simo in funzione del primo termine è $m_n = m_1 + (n-1)\cdot r$, da questa si potrà ricavare $n = (m_n - m_1)/2 + 1$, nella quale sostituite le (1.2) si otterrà $n = (p_k - 1 - (p_h + 1))/2 + 1 = (p_k - p_h - 2)/2 + 1 = (p_k - p_h)/2$ e tale risultato dimostra la (1.1).

2.Congettura di Polignac. – "Ogni numero pari è ottenibile come differenza di infinite coppie di numeri primi consecutivi", che comprende quella dei numeri primi gemelli (numeri primi consecutivi di differenza 2), cioè: "Il numero 2 è ottenibile come differenza di infinite coppie di numeri primi consecutivi".

Siano $\forall k \in N_0 \setminus \{1,2\}$, $n \in N_0$, $p_{k-1}, p_k \in \{p : \ numero \ \ primo\}$, $M(n) \in \{m : \ numero \ pari\}$.

Tesi: $M(n) = p_k - p_{k-1}$

Essendo per la (1.1) i pari *n* tra due primi qualunque p_h e p_k

$$n = \frac{p_k - p_h}{2},$$

che nel caso di due primi consecutivi, si potrà scrivere

$$n = \frac{p_k - p_{k-1}}{2},$$

dalla quale si ha

---

[1] Docente ordinario di Matematica e Dirigente scolastico in ogni ordine di scuola a r.; e-mail guidocarolla@libero.it

[2] Una perplessità dell'autore è che di dimostrazioni "elementari" se ne contano a centinaia e se ce ne fosse una elementare l'avrebbe trovata EULERO o qualcuno altro secoli fa, comunque si resta in attesa di giudizio di autorevoli studiosi.

$2n = p_k - p_{k-1}$,

essendo *2n* un numero pari, si potrà scrivere

$$M(n) = 2n = p_k - p_{k-1}, \qquad (2.1)$$

Pertanto, considerate l'infinità dei numeri primi dimostrata da Euclide[3] (IV sec. a. C.), alcune sequenze di numeri composti[4] (che lasciano supporre di poter ottenere sempre ogni numero pari dalle differenze di due primi consecutivi[5]) e la densità dei primi che diminuisce lentamente man mano che i numeri diventano sempre più grandi, [11], [13], perciò con infinite differenze tra consecutivi (conseguenza dell'infinità dei primi) anche di valori illimitati; tutto ciò prova il *parziale* asserto di Polignac (1849): "*Infiniti numeri pari sono* ottenibili come differenze di infinite coppie di numeri primi consecutivi" e quella dei primi gemelli, "Il numero 2 è ottenibile dalle differenze di infinite coppie di numeri primi consecutivi".

Prima di concludere definitivamente la dimostrazione si riportano alcuni casi concreti della tesi, partendo da quelli più semplici con i primi minori:

Da $M(n) = 2n = p_k - p_{k-1}$, POLIGNAC(1849), si ha:

$2 = 2 \cdot 1 = p_3 - p_2 = 5-3 = p_4 - p_3 = 7-5 = p_6 - p_5 = 13-11 = \ldots$
$4 = 2 \cdot 2 = p_5 - p_4 = 11-7 = p_7 - p_6 = 17-13 = p_9 - p_8 = 23-19 = \ldots$
$6 = 2 \cdot 3 = p_{10} - p_9 = 29-23 = p_{12} - p_{11} = 37-31 = p_{16} - p_{15} = 53-47 = \ldots$
$8 = 2 \cdot 4 = p_{25} - p_{24} = 97-89 = p_{73} - p_{72} = 367-359 = p_{78} - p_{77} = 397-389 = \ldots$
$10 = 2 \cdot 5 = p_{35} - p_{34} = 149-139 = p_{43} - p_{42} = 191-181 = p_{54} - p_{53} = 251-241 = \ldots$
$12 = 2 \cdot 6 = p_{47} - p_{46} = 211-199 = p_{48} - p_{47} = 223-211 = p_{92} - p_{91} = 479-467 = \ldots$
$14 = 2 \cdot 7 = p_{31} - p_{30} = 127-113 = p_{63} - p_{62} = 307-293 = p_{67} - p_{66} = 331-317 = \ldots$
…………………………………………………………………...

A completamento della proposta di dimostrazione della congettura di Polignac, si fanno seguire le risposte alle domande :

La (2.1) *M(n)=2n* può esprimere tutti i numeri pari? Ovvero ogni numero pari? Non solo infiniti numeri pari?

Le risposte scaturiscono da quanto segue:

essendo
$$M(1) = 2 = 1 \cdot 2$$
$$M(2) = 4 = 2 \cdot 2$$
$$M(3) = 6 = 3 \cdot 2$$

---

[3] Euclide (IV sec. a. C.) dimostrò per primo che esistono infiniti numeri primi. La sua dimostrazione è la seguente: se 2, 3, 5, …, *p* fossero i soli numeri primi, potremmo costruire il numero $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot p + 1$ il quale ha la proprietà di dare resto 1 quando è diviso per ciascuno di questi numeri primi. Poiché ogni numero maggiore di 1 è primo oppure divisibile per almeno un numero primo, la lista proposta non può essere completa.

[4] Si adotterà $\forall a \in N$ la seguente successione *(a+2)!+2,(a+2)!+3,…,(a+2)!+(a+1),(a+2)!+(a+2)*; detti numeri divisibili per *2,3,…,(a+1),(a+2)* sono solo parte di tutti i composti (almeno *a+1*) (rispettivamente divisibili per 2, 3, …, (a+1), (a+2)), che vi sono tra i due numeri primi di ordine consecutivo. Chiariremo la successione con un esempio: se a=3, si avrà (3+2)!+2, (3+2)!+3, (3+2)!+4, (3+2)!+5; 5!+2, 5!+3, 5!+4, 5!+5; 1x2x3x4x5(cioè cinque fattoriale 5!=120)+2, 120+3, 120+4,120+5; 122, 123,124,125, i quali almeno quattro numeri (3+1=4), essendo rispettivamente divisibili per 2, 3, 4, 5 sono composti, insieme a 114, 115, 116, 117, 118, 119, 120, 121 e 126, in tutto tredici numeri composti esistenti tra i numeri primi 113 e 127.

[5] Si riporta una coppia di primi gemelli, tra quelle maggiori, calcolata nel 1998 che è $835335^{39014} \pm 1$.

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$M(x) = \quad x \cdot 2, \qquad (2.2)$$
si ponga per assurdo che sia $M(x) \neq 2n;\ x \cdot 2 \neq 2n$; da cui si ha $x \neq n$, che non può essere, in quanto è evidente che $x = n \in N_0$.

Pur apparendo superfluo, qualora si senta la necessità, si può anche procedere alla dimostrazione per induzione della prima parte della (2.1), cioè di $M(n) = 2n$. Il primo passo consiste nel dimostrare che la formula è valida per il primo caso, $n = 1$. Ciò è decisamente semplice, poiché si sa che il doppio del primo numero naturale è 2, e se si pone $n = 1$ nella formula candidata si ottiene correttamente 2:

$$M(n) = 2n$$
$$M(1) = 2 \cdot 1$$
$$M(1) = 2\,.$$

Il passo successivo della dimostrazione della dimostrazione per induzione consiste nel dimostrare che se la formula è vera per un valore n qualsiasi, allora deve essere vera per $(n+1)$. Se

$$M(n) = 2n\,,$$

allora si ha il corretto incremento di 2:

$$M(n+1) = 2(n+1) = 2n+2.$$

La cosa fondamentale da notare è che questa nuova equazione è identica all'equazione originale tranne per il fatto che n è stato sostituito da $(n+1)$. In altre parole se la formula è vera per n, allora deve essere vera anche per $(n+1)$. La dimostrazione per induzione è completa.

Perciò tanto la prima dimostrazione, per la quale dovrà essere $\forall x \in N_0 \rightarrow M(x) = x \cdot 2 = 2n$, che la seconda per induzione, per la quale si ha $M(n) = 2n$, permettono di dare le risposte affermative alle domande di cui sopra, cioè proprio $M(x) = M(n) = 2n$ esprime ogni numero pari oppure tutti i numeri pari! Non solo infiniti numeri pari!

Con le risposte alle domande riportate sopra, non ci si è limitati a dimostrare che esistono *infiniti numeri pari* che è cosa ben diversa della dimostrazione della congettura in esame.

Per quanto attiene alle coppie di numeri primi consecutivi **in aggiunta** a quanto detto sopra ci si rifà prima alla proposizione d) [14] "La tab. 10 riporta implicitamente ogni numero pari dei vari gap e, con il riferimento a tutte le 36 famiglie, **le infinite coppie di numeri primi consecutivi** e non. Per i soli primi consecutivi, vi è una relazione con la congettura di Polignac…" e dopo per i primi gemelli [13] ed alla nota 1di [13]"… essendo **le coppie di primi gemelli infinite** come dimostrano i due cinesi, e anche noi, con la nostra dimostrazione per assurdo. Data una presunta ultima coppia di gemelli, se ne trova una ancora più grande, proprio come aveva fatto Euclide…"

Pertanto, ora si ritiene che la dimostrazione così completata, con l'apporto dei vari tasselli, possa soddisfare la congettura di Polignac (1849):

"**Ogni numero pari è** ottenibile come differenza di **infinite coppie di numeri primi consecutivi**" e quella dei primi gemelli, "Il numero 2 è ottenibile come differenza di **infinite coppie di numeri primi consecutivi**"

.

Bibliografia

[1] Autori vari e Nucleo di ricerca Didattica ALMPRT "La metodologia storica nell'insegnamento della Matematica e della Fisica" Mathesis di Teramo, 1998
[2] S. Lang, "La Bellezza della Matematica", Torino, Bollati Boringhieri, 1991
[3] J. H. Conway & R. K. Guy, "Il libro dei numeri", Milano, Hoepli, 1999
[4] H. Davenport, "Moltiplicative Number Theory" (Graduate Texts in Mathematics, Vol. 74), Berlin, Springer Verlag, 2000
[5] David Wells, "Personaggi e paradossi della Matematica", Milano, Arnoldo Mondatori Editori S. p. A., 2002
[6] Carolla G., "Formula $p_k = p_h + 2 \cdot n$ dei numeri primi ed altre considerazioni (I parte)" riportato per gentile concessione della Mathesis in www.matematicamente.it, nella sezione Approfondimenti: ricerche di appassionati dei "Numeri per tutti", a seguito comunicazione in Congresso Nazionale della Mathesis di Vico Equense (NA), località Seiano – 3,4,5,6 Novembre 2003. Riportato anche su www.desmatron.altervista.org/number_theory/goldbach.php
[7] Carolla G., "Considerazioni su tre congetture matematiche (II parte)" riportato sul sito www.matematicamente.it nella sezione Approfondimenti: ricerche di appassionati dei "Numeri per tutti", 2003
[8] Carolla G., " I numeri primi di Fibonacci sono infiniti?", riportato sul sito www.matematicamente.it, nella sezione Approfondimenti: ricerche di appassionati dei "Numeri per tutti", 2004
[9] Carolla G.-Maggiore F., "Dimostrazioni per deduzione e per induzione", riportato sul sito www.matematicamente.it, nella sezione Approfondimenti: idee interessanti. 2005
[10] Carolla G., Una nota sull'articolo "Formula ... dei numeri primi ed altre considerazioni (I parte)", riportato sul sito www.matematicamente.it nella sezione Approfondimenti: ricerche di appassionati dei "Numeri per tutti", 2006
[11] Carolla G., "Alcuni problemi irrisolti", riportato sul sito www.matematicamente.it nella sezione Approfondimenti – Matematica, 2007 (v. "Nota integrativa…" che segue)
[12] Carolla G., "Risolte le congetture di Goldbach e Polignac?" e relativa "Nota integrativa…", riportati sul sito www.maecla.it nella sezione Matematica, Problemi, articoli, …,2007
Facendo riferimento ai lavori sui numeri primi dello stesso autore, si sono indicati i siti che li riportano, ma gli articoli si potranno consultare direttamente anche con "Google".
[13] F. Di Noto, A. Tulumello, G. Di Maria, M. Nardelli, "I numeri primi gemelli e l'ipotesi di Riemann generalizzata" pubblicato sul sito www.gruppoeratostene.com, 2008.
[14] G. Carolla, "Alcune regolarità dai numeri primi" pubblicato su www.gruppoeratostene.com, 2009.