

La funzione $\mu(n)$ e le sue relazioni con le forme numeriche $6k \pm 1$, la funzione zeta e l'ipotesi RH - equivalente RH2

Gruppo Eratostene

In this paper we show some links between function $\mu(n)$, numeric forms $6k \pm 1$, zeta function and RH2 as RH equivalent hypothesis.

Riassunto

In questo lavoro mostreremo la funzione $\mu(n)$ e le sue connessioni con le forme numeriche $6k \pm 1$ dei numeri primi, la funzione zeta di Riemann (equazione da Derbyshire) e l'ipotesi RH tramite l'ipotesi RH equivalente RH2 (Rif.1)

Introduzione

Dopo la definizione, riporteremo una tabella che connette la funzione $\mu(n)$ alle forme numeriche $6k \pm 1$ dei numeri primi (tranne il 2 e il 3), evidenziando come tale funzione, al pari delle altre due funzioni simili $\varphi(n)$ e $\sigma(n)$, hanno delle "preferenze" o "non preferenze" (valori massimi o minimi) per le forme numeriche $6k \pm 1$ e $6k$, e con valori intermedi per le altre tre possibili forme numeriche (6 ± 4 , $6k \pm 3$, $6k \pm 2$) Tutte tali forme danno origine a tutti i numeri naturali n . (Rif. 2 e Rif. 2)

Definizione (parziale), da omonima voce "Funzione di Möbius" di Wikipedia:

La **funzione di Möbius** è una funzione $\mu(n)$ utilizzata in [teoria dei numeri](#) che classifica i numeri interi positivi in una di tre categorie possibili secondo la [scomposizione in fattori](#) e che entra in un'importante formula di inversione

Definizione classica [\[modifica\]](#)

La funzione viene definita assegnando a $\mu(n)$ i seguenti valori:

- -1 se n è scomponibile in un numero dispari di fattori primi distinti. Per esempio $\mu(435) = -1$ perché $435 = 3 \times 5 \times 29$, ha tre fattori primi. Per gli scopi di questa funzione, un numero primo è considerato avere un fattore primo, in sé, quindi $\mu(p) = -1$.
- 0 se ha uno o più fattori primi ripetuti. Per esempio $\mu(436) = 0$ perché $436 = 2^2 \times 109 = 2 \times 2 \times 109$, poiché gli esponenti significano che un fattore accade due volte o più nella scomposizione in fattori.
- +1 se è scomponibile in un numero pari dei fattori primi distinti. Per esempio $\mu(437) = 1$ perché $437 = 19 \times 23$. Si assume anche che $\mu(1) = 1$, considerando che abbia una scomposizione in 0 fattori primi.

Chiaramente essa è una [funzione aritmetica moltiplicativa](#), cioè tale che

$$\text{se } h \text{ e } k \text{ sono interi positivi coprimi, allora } \mu(h \cdot k) = \mu(h) \cdot \mu(k).$$

La funzione è stata introdotta da [August Ferdinand Möbius](#) nel [1832](#); la notazione $\mu(n)$ è stata introdotta da [Franz Mertens](#) nel [1974](#).

Come [successione di interi](#) la funzione di Möbius è reperibile nell'archivio [OEIS](#) in corrispondenza della sigla [A008683](#).

La funzione di Möbius è una funzione incorporata nel sistema computazionale [Mathematica](#); essa viene invocata con una richiesta della forma `MoebiusMu[n]`.

valori che la funzione assume in corrispondenza dei primi 100 interi positivi sono:

$\mu(n)$ +1 +2 +3 +4 +5 +6 +7 +8 +9 +10 +11 +12 +13 +14 +15 +16 +17 +18 +19 +20

0+ 1 -1 -1 0 -1 1 -1 0 0 1 -1 0 -1 1 1 0 -1 0 -1 0

20+ 1 1 -1 0 0 1 0 0 -1 -1 -1 0 1 1 1 0 -1 1 1 0

40+ -1 -1 -1 0 0 1 -1 0 0 0 1 0 -1 0 1 0 1 1 -1 0

60+ -1 1 0 0 1 -1 -1 0 1 -1 -1 0 -1 1 0 0 1 -1 -1 0

80+ 0 1 -1 0 1 1 1 0 -1 0 1 0 1 1 1 0 -1 0 0 0

Rapporto con la formula di inversione [\[modifica\]](#)

La somma di tutti i valori della funzione di Möbius su tutti i divisori di un intero n è 0 tranne che per $n=1$, nel quale vale 1:

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1 \\ 0 & \text{se } n > 1 \end{cases}$$

La funzione di Mertens [\[modifica\]](#)

Una funzione aritmetica legata alla funzione di Möbius è la [funzione di Mertens](#), definita come

$$M(n) = \sum_{k=1}^n \mu(k)$$

Tale funzione è legata agli zeri della [funzione zeta di Riemann](#) e all'[ipotesi di Riemann](#)

Sulla funzione di Mertens, vedi Rif. 4)

La funzione di Mertens, o funzione $\mu(n)$ cumulativa, è importante poiché è collegata alla funzione zeta dalla formula :

$$1/\zeta(s) = \sum_n \mu(n)/n^s$$

Ma vediamo le tabelle sulla connessione tra funzione $\mu(n)$, $M(n)$ e forme $6k \pm 1$:

Tabella per la funzione $\mu(n)$

I valori che la funzione assume in corrispondenza dei primi 100 interi positivi sono:

(in rosso i valori per le forme $6k$ e in blu quelli per le forme $6k \pm 1$)

$\mu(n)$	+1	+2	+3	+4	+5	+6	+7	+8	+9	+10	+11	+12	+13	+14	+15	+16	+17	+18	+19
0+	1	-1	-1	0	-1	1	-1	0	0	1	-1	0	-1	1	1	0	-1	0	-1
20+	1	1	-1	0	0	1	0	0	-1	-1	-1	0	1	1	1	0	-1	1	1
40+	-1	-1	-1	0	0	1	-1	0	0	0	1	0	-1	0	1	0	1	1	-1
60+	-1	1	0	0	1	-1	-1	0	1	-1	-1	0	-1	1	0	0	1	-1	-1
80+	0	1	-1	0	1	1	1	0	-1	0	1	0	1	1	1	0	-1	0	0

Come si nota , per $6k$ i valori in rosso sono sempre **0** e **-1** , mentre per le forme $6k \pm 1$ i valori in blu sono sempre **-1** e **1** , oppure **-1** e **0**, quindi i valori 0 e -1 sono i valori minimi per $n = 6k$ come da seguente altra tabella

n	$\mu(6k-1)$	$\mu(6k)$	$\mu(6k+1)$
6	-1	1	-1
12	-1	0	-1
18	-1	0	-1
24	-1	0	0

Come si nota, il valore 0 per le forme $6k$ è sempre maggiore di -1 per le forme $6k \pm 1$, quindi la funzione $\mu(n)$ è massima (0) per i numeri n di forma $6k$; infatti la somma dei valori rossi per $n = 6k$ è $1+0+0+0 = 1$, mentre per $6k-1$ abbiamo somma algebrica $(-1) + (-1) + (-1) + (-1) = -4$ e per $6k + 1$ abbiamo $(-1)+(-1)+(-1) + 0 = -3$.

La funzione $\mu(n)$, insomma, “preferisce” la forma $n = 6k$, similmente alla funzione $\sigma(n)$, collegata alla RH1 (Rif.5), mentre la funzione $\mu(n)$ è connessa alla RH2; la funzione totiente $\varphi(n)$ (valori massimi) e la funzione zeta $\zeta(s)$ si basano invece sulle forme $6k \pm 1$, sebbene la funzione zeta non abbia valori per i singoli numeri n .

Tabella per la funzione di Mertens per i numeri n di tali forme:

K	$6k-4$	$6k-3$	$6k-2$	$6k-1$	$6k$	$6k+1$
1 (1, 1)	2,0	3,-1	4,-1	5,-2	6,-1	7,-2
2	8,-2	9,-2	10,-1	11,-2	12,-2	13,-3
3	14,-2	15,-1	16,-1	17,-2	18,-2	19,-3
4	20,-3	21,-2	22,-1	23,-2	24,-2	25,-2
5	26,-1	27,-1	28,-2	29,-2	30,-3	31,-4
6	32,-4	33,-3	34,-2	35,-1	36,-1	37,-2
7	38,-1	39, 0	40, 0	41,-2	42,-1	43,-3
...
...

somma s dei vari valori per ogni colonna è, rispettivamente:

-13 -10 -8 -13 -12 -19

con valori assoluti più alti nella sesta colonna ($6k+1$) e più bassi nella terza ($6k-2$)

con rispettive medie $s/7$ di :

-1,8 -1,4 -1,1 -1,8 -1,7 -2,7

La somma totale delle somme parziali è **-75**, con somma s media = $-75/7 = -12,5$

Connessione con la RH tramite la RH2

Tale funzione $\mu(n)$ è connessa all' ipotesi equivalente RH2 (Rif. 1, pagg.50-51) tramite la funzione di Mertens (funzione $\mu(n)$ cumulativa), per la quale si rimanda al Rif. 1 di cui sopra e al Rif. 4. Un altro buon riferimento per la RH2 è il Rif.6 (il blog matematico del Prof. Umberto Cerruti)

Riferimenti

- 1) "Sulle spalle dei giganti" in sezione "Articoli sulla Teoria dei Numeri"
- 2) "I numeri nontotienti e non cototienti", idem
- 3) "Funzione totiente ed RH", Gruppo Eratostene, in sezione Articoli su Riemann
- 4) "LA FUNZIONE MEDIA DI MERTENS E L'ABBONDANZA DI GOLDBACH" in sezione "Articoli su Riemann"

- 5) “Dai multipli di 6 alla Riemann Hypothesis” idem
 6) “Blog matematico” del prof Umberto Cerreti, paragrafo “La congettura di Riemann e le sue gemelle” (tra le quali la RH2)
 sul sito: www.dm.unito.it/~cerruti/luglio04-gennaio28.html

Caltanissetta 2.1.2011

Nota 1 parzialmente esplicativa sulla funzione $\mu(n)$ e la funzione zeta, e quindi la RH2.

Dal libro di Derbyshire “L’ossessione dei numeri primi”(Bollati Boringheri”, pag. 264:

“...Ad ogni modo, la funzione di Möbius è immensamente utile nella teoria dei numeri e svolgerà un ruolo importantissimo nel seguito di questo libro. Per darvi un esempio della sua utilità, notate che tutti quei laboriosi passaggi algebrici (nelle pagine precedenti, N.d.A.A.) si riducono all’elegante risultato indicato nell’espressione 15.5:

$$1/\zeta(s) = \sum_n \mu(n) / n^s$$

Nella storia dell’ipotesi di Riemann, il valore cumulativo di $\mu(n)$, ovvero il numero che si ottiene sommando $\mu(1) + \mu(2) + \mu(3) + \dots + \mu(k)$ per un determinato k , è importante quanto $\mu(n)$.

Questa è la << funzione di Mertens >>, $M(k)$. I suoi primi dieci valori (vale a dire per i gli argomenti $k = 1, 2, 3, \dots$ fino a 10) sono 1, 0, -1, -1, -2, -1, -2, -2, -2, -1. $M(k)$ è una funzione molto irregolare, che oscilla sopra e sotto lo zero con un andamento che i matematici chiamano *random walk* (<< cammino aleatorio >>). Per argomenti fino a pari a 1000, 2000...fino a 10 000 la funzione assume i valori 2, 5, -6, -9, 2, 0, -25, -1, 1, -23. Per argomenti pari a 1 milione, 2 milioni.. fino a 10 milioni, la funzione ha i valori: 212, -247, 107, 192, -709, 257, -184, -189, -340, 1037: Se non tenete conto dei segni, è abbastanza chiaro che l’ampiezza di $M(k)$ aumenta, ma di chiaro non c’è nient’altro”. La relazione con la RH è la seguente (sempre dal Derbyshire, pag. 265):

“Dall’espressione 15.5 segue che gli andamenti della funzione μ e della funzione M (μ cumulativa) sono strettamente collegati con la funzione zeta

e, pertanto, con l'ipotesi di Riemann. Infatti, se poteste dimostrare il teorema 15.1, seguirebbe che l'ipotesi di Riemann è vera!

$$M(k) = O(k^{1/2})$$

Teorema 15.1

Se però il teorema 15.1 non vale, non segue che l'ipotesi è falsa- I matematici dicono che il teorema 15.1 è più forte dell'ipotesi: una versione leggermente più debole, il teorema 15.2 è esattamente forte come l'ipotesi.

$$M(k) = O(k^{1/2+\varepsilon})$$

per ogni ε piccolo a piacere

Teorema 15.2

Se il teorema 15.2 è vero, l'ipotesi è vera. e se il teorema è falso, l'ipotesi è falsa. Sono teoremi del tutto equivalenti..."

In questo lavoro abbiamo però almeno chiarito un po' la relazione tra la funzione $\mu(n)$ con le forme $6k \pm 1$, e con la funzione media di Mertens. La funzione media di Mertens $M'(n)$ (Rif.4) è sempre positiva, e parzialmente legata a $\ln(n)$, infatti per 10.000 000, $M(10\ 000\ 000) = 13,6 \sim 16,11 = \ln 10\ 000\ 000$. La funzione media di Mertens è sempre positiva a partire da $n = 1000$, così come (un semplice paragone matematico), la materia (+) ha prevalso sull'antimateria subito dopo il big-bang, e ora forma il nostro mondo fisico (per circa un milionesimo della materia iniziale); analogamente, la funzione media di Mertens positiva prevale, dopo $k=1000$ (qui k è diverso dal k delle forme $6k \pm 1$) come somma algebrica sui singoli valori positivi e negativi per i singoli numeri sopraccitati, da 1 milione a 10 milioni: ciò che rimane dalla relativa funzione media di Mertens è, appunto, il numero positivo 13,6, circa un milionesimo di 10 milioni.

Per $10^{10} = 10$ miliardi, si prevede un valore di $M'(10^{10})$ di circa 21, cioè di poco inferiore a $\ln(n) = \ln(10^{10}) = 23,02 \sim 21$.

Questo potrebbe essere utile per ulteriori studi sull'argomento sulla funzione di Mertens e le sue relazioni con la RH2.

FINE