

# I NUMERI PRIMI GAUSSIANI

oooooooooooooooooooo

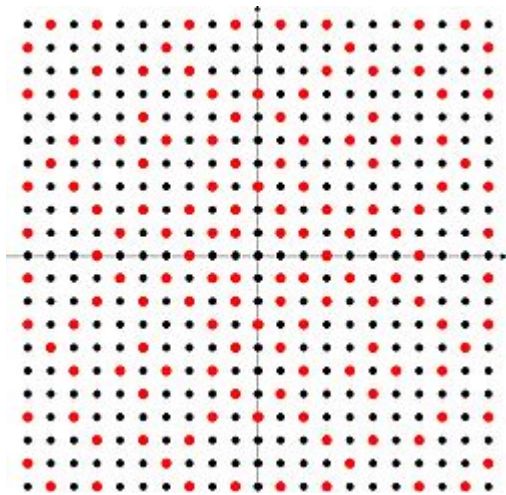
## *Gruppo Eratostene*

I numeri primi gaussiani sono quei numeri primi che si possono scrivere come somma di due quadrati.

Da Wikipedia , voce "Intero di Gauss" riportiamo parzialmente :

"Un intero di Gauss (o gaussiano) è un [numero complesso](#) le cui parti reale e immaginaria sono [interi](#). L'[insieme](#)  $\mathbb{Z}[i]$  degli interi di Gauss, dotato delle ordinarie operazioni di addizione e moltiplicazione tra numeri complessi, è un [anello](#) ...

Primi di Gauss [[modifica](#)]



### Rappresentazione degli interi di Gauss con i "primi" segnati in rosso

Come i [numeri interi](#), anche gli interi di Gauss possono essere scritti in maniera (quasi) unica come [prodotto di "primi"](#), detti **primi di Gauss**. Alcuni "comuni" [numeri primi](#) sono primi di Gauss, mentre altri diventano dei numeri composti; per esempio  $2 = (1 + i)(1 - i)$  e  $5 = (2 + i)(2 - i)$ .

Più precisamente:

- i numeri primi [congrui](#) a 3 modulo 4 sono primi di Gauss;
- i numeri primi congrui a 1 modulo 4 sono il prodotto di due distinti primi di Gauss,  $p = a^2 + b^2 = (a+bi)(a-bi)$  ([teorema di Fermat sulle somme di due quadrati](#));
- 2 è, salvo un invertibile (negli interi "il segno"), il quadrato di un primo di Gauss:  $(1+i)^2 = 2i$ ;
- non esistono altri primi di Gauss (la norma di un primo di Gauss è pari a un numero primo o al suo quadrato).

I primi di Gauss sono infiniti, perché sono infiniti i numeri primi...".

Dalla voce "Teorema di Fermat sulle somme di due quadrati":

### **Teorema di Fermat sulle somme di due quadrati**

Da Wikipedia, l'enciclopedia libera.

Il **teorema di [Fermat](#) sulle somme di due quadrati** afferma che ogni [numero primo](#) dispari (quindi escluso solo il 2) si può scrivere come somma di due quadrati perfetti se e solo se è [congruo](#) a 1 modulo 4, in altre parole se la differenza tra tale numero primo e 1 è multipla di 4. Per esempio:

$$5 = 1^2 + 2^2 \quad 13 = 2^2 + 3^2 \quad 17 = 1^2 + 4^2 \quad 29 = 2^2 + 5^2$$

La prima dimostrazione nota di questo teorema risale a [Eulero](#).

Fermat propose questo teorema in una lettera a [Marin Mersenne](#) datata [25 dicembre 1640](#), per questo motivo è noto anche come *Teorema di Natale di Fermat*...."

Per le dimostrazioni si rimanda a Wikipedia

Tali numeri sono importanti per la fisica quantistica, come scrive il nostro

collaboratore Ing. Rosario Turco nel suo blog:

[mathbuildingblock.blogspot.com/.../i-numeri-primi-e-i-numeri-gaussiani.html](http://mathbuildingblock.blogspot.com/.../i-numeri-primi-e-i-numeri-gaussiani.html)

*martedì 18 gennaio 2011*

## **I numeri primi e i numeri Gaussiani primi**

Una delle cose che, forse, non tutti sanno è che risulta possibile estendere nel piano di Argand, noto anche come piano di Gauss, il concetto di numero primo ed è possibile farlo per diverse altre proprietà dei numeri. Passare da una dimensione a due dimensioni dei numeri complessi è inizialmente un gioco che porta a molte riflessioni e alla nascita di tecniche nuove.

I numeri nel piano complesso sono definiti numeri di Gauss interi oppure numeri di Gauss primi. Nel mondo dei numeri interi, compreso i negativi, sappiamo trattare facilmente i numeri primi e la fattorizzazione.

Alcuni elementi semplici del mondo degli interi ad "una dimensione" sono ad esempio:

- 1) Un numero è primo se divisibile per 1 e sé stesso.
- 2) i numeri primi appartengono sia alla forma  $4n+1$  che  $4n+3$
- 3) la scomposizione di un numero è univoca

Se passiamo un attimo al mondo dei numeri complessi, vediamo che si perdono alcune delle tre proprietà di sopra. Prendiamo un numero primo, ad esempio il 2. Il 2 è fattorizzabile, nel piano di Gauss; quindi, non è primo; difatti  $(1+i)(1-i)=2$ . Mentre numeri di Gauss primi sono ovviamente  $1-i$  e  $1+i$ . Eppure il 2 nel mondo degli interi era primo. Stessa cosa accade al 5 il 13 e il 17. Chi mi sa trovare altri? E' facile.

La 2) è vera solo per i numeri di forma  $4n+3$ . I numeri  $4n+1$  non sono numeri di Gauss primi.

La divisione per 4 è, quindi, un utile tool di verifica se il numero può essere un numero di Gauss primo. Quelli di forma  $4n+1$  sono numeri di Gauss interi perché possono essere splittati, fattorizzati o scomposti in numeri di Gauss primi.

Non solo, ma i numeri interi (non quelli di Gauss) splittabili hanno la proprietà (dovuta a Pitagora) di essere esprimibili come somma di quadrati di due interi. Ad esempio  $5 = 1 + 4$ ,  $13 = 4 + 9$ , etc.

I numeri immaginari escono fuori anche dalle soluzioni delle equazioni quadratiche, cubiche etc. avendo ammesso che  $i^2 = -1$ , cosa che non piaceva a *Kronecker*, il quale affermava: "Dio ha creato i numeri naturali, l'uomo ha fatto il resto".

D'altra parte i numeri immaginari iniziano possono far capolino anche nell'*Ultimo Teorema di Fermat* che sostiene correttamente (dimostrazione di *Andrew Wiles*) che il cubo di un intero qualsiasi non è mai somma di due cubi.

Se aggiungiamo i numeri razionali compresi dai numeri complessi è evidente che si perde anche la proprietà 3). Ad esempio prendiamo 6: Nel mondo degli interi  $-6 = -2 \cdot 3$ . Nel mondo dei numeri di Gauss possiamo avere che:

$$-6 = (1 + \sqrt{-5})(-1 + \sqrt{-5})$$

e inoltre è anche

$$-6 = -2 \cdot 3$$

Adesso la fattorizzazione non è unica, anzi un numero potrebbe essere splittato in vari modi.

In seguito a questo *Eduard Kummer* introdusse la "teoria dei numeri ideali", per giustificare situazioni come questa e per sostenere settori della Fisica, come la teoria quantistica. Per la verità furono introdotti inizialmente per attaccare l'Ultimo Teorema di Fermat facendo nascere quella che fu detta la teoria dei numeri algebrica.

I settori di sopra attualmente sono meno "presidiati" e offrono ancora tante altre opportunità. Penso ad esempio che esistono molte proprietà della teoria dei numeri (proprietà come quelli dei vari tipi di numeri) da verificare anche tra i numeri Gaussiani e gli ideali ...

Grossi e ulteriori sostenitori di questi settori della matematica furono *Dedekind* (allievo di *Gauss*), *Dirichlet* e *Riemann* (allievo di *Dirichlet*).

Parafrasando *Einstein*, mi piace concludere questa semplice panoramica, osservando che spesso "I problemi hanno soluzioni il cui livello di pensiero è totalmente diverso da quello che ha fatto nascere il problema", ma aggiungo che esistono anche molte soluzioni alla ricerca del problema giusto. “

La somma di due quadrati è coinvolta anche nella **congettura di Girard**, sulla quale riportiamo un nostro lavoro (con accenni ai numeri di Collatz, anch'essi di forma  $4n+1$  come alcuni numeri primi che sono anche somma di due quadrati).

**“OSSERVAZIONI SULLA  
CONGETTURA DI ALBERT GIRARD :  
( $N = 4n + 1 = a^2 + b^2$ ) -**

.....

***Gruppo Eratostene***

Si dice che Fermat dimostrò questo teorema; noi, nel seguito facciamo soltanto alcune osservazioni e diamo delle evidenze sull'argomento.

Facciamo una tabella per i primi numeri  $n$  successivi, con le colonne  $n$ ,  $N = 4n+1$ ,  $a^2 + b^2$  uguale a  $4n+1$ , con la notazione, per ogni  $N$ , se esso è primo, semiprimo o multiplo di 3.

$n$	$N = 4n + 1$	$a^2 + b^2$	Tipi di numeri $N$
1	5 = 4*1 + 1	4 + 1	primo (*)
2	9 = 4*2 + 1	9 + 0	multiplo di 3
3	13 = 4*3 + 1	9 + 4	primo
4	17 = 4*4 + 1	16 + 1	primo
5	21 = 4*5 + 1		multiplo di 3 (*)
6	25 = 4*6 + 1	25 + 0	
7	29 = 4*7 + 1	25 + 4	primo
8	33 = 4*8 + 1		multiplo di 3
9	37 = 4*9 + 1	36 + 1	primo
10	41 = 4*10 + 1	25 + 16	primo
11	45 = 4*11 + 1		multiplo di 3
12	49 = 4*12 + 1	49 + 0	non primo
13	53 = 4*13 + 1	49 + 4	primo
14	57 = 4*14 + 1		multiplo di 3
15	61 = 4*15 + 1	36 + 25	primo
16	65 = 4*16 + 1	64+1 = 49+16	non primo
17	69 = 4*17 + 1		multiplo di 3
18	73 = 4*18 + 1	64 + 9	primo
19	77 = 4*19+1		non primo
20	81 = 4*20+1	81 + 0	non primo
21	85 = 4*21+1	81 + 4	non primo(*)
22	89 = 4*22+1	64 + 25	primo
23	93 = 4*23+1		multiplo di 3
24	97 = 4*24+1	81 + 16	primo
25	101 = 4*25+1	100 + 1	primo
26	105 = 4*26+1		multiplo di 3
27	109 = 4*27+1	100 + 9	primo
.....	.....	.....	.....

Si nota che circa un terzo ( $3,375 = 27/8$ ) dei numeri di forma  $4n+1$  è multiplo di 3, e i multipli di 3 non sono mai somme di due quadrati. Gli altri due terzi circa di numeri  $N$  o sono quadrati perfetti,

e quindi soddisfano la congettura, poiché anche  $0^2 = 0$ , e quindi abbiamo  $N^2 + 0^2$ , per esempio  $81 = 9^2 + 0^2 = 81 + 0 = 81$ , oppure semiprimi (prodotti tra due numeri primi Entrambi maggiori di 3), che possono (per es.  $85 = 81 + 4$ ) o no (per es. 77) essere somma di due quadrati  $a^2 + b^2$ .

(\*) I numeri asteriscati sono anche i numeri di Collatz, cioè quelli che, essendo anche di forma  $(2^m - 1)/3$  (Rif. 1), sono quelli che fanno collassare l'algoritmo di Collatz verso la sua conclusione finale ... ,4, 2, 1, per i motivi indicati nella nostra dimostrazione positiva della medesima (tale algoritmo finisce sempre per tutti gli infiniti numeri n poiché essendo infiniti i numeri di Collatz della forma suddetta - ciò dipende dalla infinità di  $2^m$  con m pari - tutti gli infiniti n della forma  $3n + 1$  della congettura incappano prima o poi in un numero di Collatz e con ciò l'algoritmo termina nella sequenza finale ...4, 2, 1.)

## Conclusioni

La congettura di Girard, dimostrata da Fermat, non è valida:

- per i numeri  $N = 4n+1$  che siano anche multipli di 3, e
- per i numeri primi di forma  $4n+3$ , per esempio 31, 43, ecc.

è valida per:

- tutti i numeri primi di forma  $4n + 1$  e
- per molti semiprimi, ed è anche collegabile alla ex congettura di Collatz, poiché anche i numeri di Collatz sono di forma  $4n+1$ , e spesso anche multipli di 3 (per esempio 21).

## Riferimenti

1) Sezione "Articoli su Collatz" sul nostro sito

[www.gruppoeratostene.com](http://www.gruppoeratostene.com)

Caltanissetta 1.2.2011