

I NUMERI PRIMI DI CULLEN E DI WOODALL

Gruppo Eratostene

Prima di esaminare i numeri primi di Cullen e di Woodall, accenniamo ai più generici numeri omonimi, dalle relative voci di Wikipedia

“In [matematica](#) si chiamano **numeri di Cullen** e si indicano con C_n [numeri naturali](#) tali che

$$C_n = n \cdot 2^n + 1$$

...

La sequenza [[modifica](#)]

Furono studiati per la prima volta da [James Cullen](#) nel [1905](#). Gli studi di Cullen sui numeri di questo tipo furono utilizzati nel [1917](#) da [Allan J. C. Cunningham](#) e [H. J. Woodall](#) per la (simile) definizione dei [numeri di Woodall](#). I primi numeri di Cullen

sono:

$$\begin{aligned}C_1 &= 3 \\C_2 &= 9 \\C_3 &= 25 \\C_4 &= 65 \\C_5 &= 161 \\C_6 &= 385 \\C_7 &= 897\end{aligned}$$

(sequenza [A002064](#) dell'[OEIS](#)).

I primi di Cullen [\[modifica\]](#)

I numeri di Cullen che sono anche [primi](#) vengono chiamati **Numeri primi di Cullen**.

I primi valori di n che rendono primi i numeri di Cullen sono:

1, 141, 4713, 5795, 6611, 18496, 32292, 32469, 59656, 90825, 262419, 361275, 481899, 1354828, 6328548

(sequenza [A005849](#) dell'[OEIS](#)). A differenza dei **numeri primi di Woodall**, i primi di Cullen sono molto difficile da calcolare. I primi due sono

$$C_1 = 3$$
$$C_{141} = 393050634124102232869567034555427371542904833 \approx 3.93 \cdot 10^{44}$$

Il numero n più alto conosciuto che genera un numero primo di Cullen è 1354828, esso restituisce il numero primo

$$C_{1354828} \approx 3.97 \cdot 10^{407849}$$

Proprietà [\[modifica\]](#)

Un numero di Cullen è divisibile per $p = 2n - 1$ se p è un numero primo di forma $p = 8k - 3$. Inoltre, grazie al [Piccolo teorema di Fermat](#), sappiamo che p sarà un numero dispari, e ne segue che p divide anche $C_{m(k)}$ per ogni $m(k) = (2^k - k)(p - 1) - k$ per ogni k positivo.

È stato inoltre dimostrato che p divide il numero

$$C_{\frac{p+1}{2}}$$

quando [Simbolo di Jacobi](#) $\left(\frac{p}{2}\right)$ è -1

e divide

$$C_{\frac{3p-1}{2}}$$

se il Simbolo di Jacobi $\left(\frac{p}{2}\right)$ è $+1$

Numero di Cullen generalizzato [\[modifica\]](#)

Un numero di forma

$$C_n = n \cdot b^n + 1$$

è chiamato **Numero di Cullen generalizzato.**”

Per i numeri di Woodall, invece:

“ In [matematica](#) si chiamano **numeri di Woodall** e si indicano con W_n [numeri naturali](#) di forma

$$n \cdot 2^n - 1$$

....

La sequenza [\[modifica\]](#)

Furono studiati per la prima volta da [Allan J. C. Cunningham](#) e [H. J. Woodall](#), due matematici inglesi, nel [1917](#), grazie alle osservazioni di [James Cullen](#) sui [numeri di Cullen](#), similmente definiti. I primi numeri di Woodall sono:

$$\begin{aligned}W_1 &= 1 \\W_2 &= 7 \\W_3 &= 23 \\W_4 &= 63 \\W_5 &= 159 \\W_6 &= 383 \\W_7 &= 895\end{aligned}$$

(sequenza [A003216](#) dell'[OEIS](#)).

I primi di Woodall [\[modifica\]](#)

I numeri di Woodall che sono anche [primi](#) vengono chiamati **Numeri primi di**

Woodall. I primi valori di n che rendono primi i numeri di Woodall sono

2, 3, 6, 30, 75, 81, 115, 123, 249, 362, 384 (sequenza [A002234](#) dell'[OEIS](#)). La

sequenza dei numeri primi di Woodall è invece

$$\begin{aligned}W_{p1} &= 7 \\W_{p2} &= 23 \\W_{p3} &= 383 \\W_{p4} &= 32212254719 \approx 3.221 \cdot 10^{10}\end{aligned}$$

$$W_{p^5} = 2833419889721787128217599 \approx 2.833 \cdot 10^{24}$$

(sequenza [A050918](#) dell'[OEIS](#)).

Proprietà [\[modifica\]](#)

I numeri di Woodall hanno diverse proprietà di divisibilità. Ad esempio, se p è un numero primo, allora divide

$$W_{\frac{p+1}{2}}$$

se il [Simbolo di Jacobi](#) $\left(\frac{p}{2}\right)$ è $+1$

e divide

$$W_{\frac{3p-1}{2}}$$

se il [Simbolo di Jacobi](#) $\left(\frac{p}{2}\right)$ è -1

Esiste anche una congettura che dice che ci sono [infiniti](#) numeri primi di Woodall. Ad [agosto 2007](#) il più grande conosciuto è generato da $n = 2367906$ ed è un numero di 712818 cifre:

$$W_{2367906} = 2367906 \cdot (2^{2367906} - 1) \approx 1.280 \cdot 10^{712817}$$

Numero di Woodall generalizzato [\[modifica\]](#)

Un numero di forma

$$W_n = n \cdot b^n - 1$$

è chiamato **Numero di Woodall generalizzato**

Vediamo ora i soli numeri primi di entrambi i tipi.

Numeri di Cullen

Affinché un qualsiasi numero primo $p > 3$ (esclusi quindi il 2 e il 3 iniziali), esso

deve essere di forma $6k-1$ oppure $6k+1$, essendo $6k \pm 1$ a forma aritmetica generale

dei numeri primi. Vediamo come, per i numeri primi di Cullen, la forma

$$C_n = n \cdot 2^n + 1$$

possa essere ricondotta alla forma $6k \pm 1$: ponendo n pari, abbiamo

$$2 \cdot 2^2 + 1 = 2 \cdot 4 + 1 = 8 + 1 = 9 = 3 \cdot 3, \text{ divisibile per } 3$$

$$4 \cdot 2^4 + 1 = 4 \cdot 16 + 1 = 64 + 1 = 65 = 5 \cdot 13, \text{ divisibile per } 5$$

$$6 \cdot 2^6 + 1 = 6 \cdot 64 + 1 = 385 \text{ divisibile per } 5$$

$$8 \cdot 2^8 + 1 = 8 \cdot 256 + 1 = 2048 + 1 = 2049 = 3 \cdot 683, \text{ divisibile per } 3$$

n pari, quindi, non produce numeri di forma $6k \pm 1$, ma solo di forma $6k \pm 3$, e quindi non primi (sono infatti divisibili per 3 e per 5).

Per n dispari, invece, abbiamo $n = 1, n = 3, n = 5$

$$1 \cdot 2^1 + 1 = 3 \text{ primo numero di Cullen}$$

$$3 \cdot 2^3 + 1 = 3 \cdot 8 + 1 = 24 + 1 = 25 = 5 \cdot 5, \text{ divisibile per } 5$$

$$5 \cdot 2^5 + 1 = 5 \cdot 32 + 1 = 161 = 7 \cdot 23, \text{ divisibile per } 7$$

3, 9, 25, 65 e 161 sono nell'elenco dei numeri di Cullen, ma solo $C_1 = 3$ è primo, il prossimo primo è C_{141} .

Circa le forme aritmetiche, notiamo che :

TABELLA 1

$$C_1 = 3 = 6 \cdot 0 + 3$$

$$C_2 = 9 = 6 \cdot 1 + 3$$

$$C_3 = 25 = 6 \cdot 4 + 1$$

$$C_4 = 65 = 6 \cdot 11 - 1$$

$$C_5 = 161 = 6 \cdot 27 - 1$$

$$C_6 = 385 = 6 \cdot 64 + 1$$

$$C_7 = 897 = 3 \cdot 299 = 6 \cdot 149 + 3$$

$$C_8 = 2049 = 3 \cdot 683 = 6 \cdot 341 + 3$$

$$C_9 = 4609 = 6 \cdot 768 + 1$$

$$C_{10} = 10241 = 6 \cdot 1707 - 1$$

$$C_{11} = 22529 = 6 \cdot 3755 - 1$$

$$C_{12} = 49153 = 6 \cdot 8192 + 1$$

$$C_{13} = 106497 = 3 \cdot 35499 = 6 \cdot 17749 + 3$$

... ..

Si può stabilire una regola precisa per la forma $6n \pm 1$ nell'ambito di una regola più generale: abbiamo due numeri divisibili per 3 (e cioè 3 e 9, di cui 3 iniziale e quindi numero primo, in questo caso di Cullen), seguiti da quattro numeri rispettivamente di forma $6k+1, 6k-1, 6k-1, 6k+1$, con indici n di C_n alternati: dispari, pari, dispari, pari, e con segni così disposti: $+, -, -, +$ e quindi il primo numero di Cullen di ogni quaterna (sempre dispari) ha segno $+$ e il terzo ha segno $-$, mentre per i numeri indici n pari succede il contrario: il secondo numero della quaterna ha indice pari e segno $-$, il quarto ha indice pari e segno $+$. Dopo ogni quaterna c'è una coppia di multipli di 3, e così via: gli indici di tali coppie sono 1 e 2, 7 e 8, 13 e 14, con la sequenza

$$2 + 5 = 7$$

$$8 + 5 = 13$$

$$14 + 5 = 19 ; \text{ poichè } 2, 8 \text{ e } 14 \text{ sono di forma } 6k + 2 \text{ a partire da } k = 0 \text{ e } 7, 13 \text{ e } 19$$

sono di forma $6k+1$ a partire da $k = 1$, è facile prevedere che tra indici di forma $6k+2$ e $6(k+1) + 5$ ci sono quattro numeri di Cullen di forma $6k \pm 1$ e due di forma $6k+3$ (quelli divisibili per 3). Possiamo prevedere facilmente che C_{14} , essendo $14 =$

8+6, è divisibile per 3, infatti

$C_{14} = 14 \cdot 2^{14+1} = 14 \cdot 16384 + 1 = 229\,377 = 3 \cdot 76\,459$; seguirà una quaterna di numeri di Cullen C_{15} , C_{16} , C_{17} e C_{18} di forma $6k \pm 1$ segno alternato +, -, -, + come sopra accennato, e la coppia di numeri C_{19} e $C_{20} = C_{13+6}$ e C_{14+6} divisibili per 3.

Concludendo, e semplificando, le coppie di numeri di Cullen multipli di 3 sono quelle con indici $6k + 1$ e $6k+2$, infatti abbiamo tali coppie con indici (in rosso quelli già verificati)

TABELLA 2

k	6k+1	6k+2
0	1	2
1	7	8
2	13	14
3	19	20
4	25	26
5	31	32
...

Per la cronaca, il secondo numero primo di Cullen è di forma $6k+1$ essendo $141 = 3 \cdot 47$, multiplo dispari di 3, e come tale, il secondo numero primo di Cullen è di forma $6k + 1$ ed è all'inizio della quaterna di indici 141, 142, 143, 144. Infatti la somma di tutte le cifre di C_{141} è 175, di forma $6 \cdot 29 + 1 = 6k + 1$, la stessa di C_{141} .

Poiché tali quaterne cominciano con un indice multiplo dispari di 3 e finiscono con un indice multiplo pari di 3 (vedi elenco da C_1 a C_{12} a pag. 5), e $141 = 3 \cdot 47$ è un multiplo dispari di 3, ne consegue che C_{141} , secondo numero primo di Cullen, è il

primo della quaterna a cui appartiene : C_{141} , C_{142} , C_{143} , C_{144} , alla quale segue una coppia di numeri di Cullen multipli di 3, poiché 145 è di forma $6 \cdot 24 + 1$ e 146 è di forma $6 \cdot 24 + 2$, come prima detto (vedi Tabella 1) : Ecco quindi come queste considerazioni possono permettere di fare delle previsioni sui numeri di Cullen e quindi anche sui numeri primi di Cullen.

Numeri di Woodall

Stesse considerazioni e previsioni si possono quindi fare anche per i numeri di Woodall, che sono ovviamente di forma $C_n - 2$ e quindi tutto il discorso dei segni viene capovolto: ci sarà il segno $-$ al posto di $+$, come vedremo. Essendo i numeri primi di Woodall più numerosi (almeno inizialmente) dei numeri primi di Cullen, vuol dire che i numeri primi “preferiscono” la formula di Woodall

$$n \cdot 2^n - 1$$

pur essendo anch'essa ugualmente esponenziale come l'omologa di Cullen. Misteri dei numeri primi. Anche le differenze pari tra due numeri primi preferiscono la forma $6k - 2$ anziché $6k$ (per esempio per i numeri sexy) oppure $6k + 2$. Il segno $-$ sembra preferito in più occasioni dai numeri primi.

TABELLA 3

Numeri di Cullen C_n	Numeri di Woodal = $C_n - 2$
$C_1 = 3 = 6 \cdot 0 + 3$	$W_1 = 3 - 2 = 1$ $6 \cdot 0 + 1$
$C_2 = 9 = 6 \cdot 1 + 3$	$W_2 = 9 - 2 = 7$ primo $6 \cdot 1 + 1$
$C_3 = 25 = 6 \cdot 4 + 1$	$W_3 = 25 - 2 = 23$ primo $6 \cdot 4 - 1$
$C_4 = 65 = 6 \cdot 11 - 1$	$W_4 = 65 - 2 = 63 = 3 \cdot 21$ $6 \cdot 10 + 3$
$C_5 = 161 = 6 \cdot 27 - 1$	$W_5 = 161 - 2 = 159 = 3 \cdot 53$ $6 \cdot 26 + 3$
$C_6 = 385 = 6 \cdot 64 + 1$	$W_6 = 385 - 2 = 383$ primo $6 \cdot 64 - 1$
$C_7 = 897 = 3 \cdot 299 = 6 \cdot 149 + 3$	$W_7 = 897 - 2 = 895 = 6 \cdot 149 + 1$
$C_8 = 2049 = 3 \cdot 683 = 6 \cdot 341 + 3$	$W_8 = 2049 - 2 = 2047 = 6 \cdot 341 + 1$

$$\begin{array}{llll}
C_9 = 4609 & = & 6*768 + 1 & W_9 = 4609-2= 4607=17*271 \quad \mathbf{6*768 -1} \\
C_{10} = 10241 & = & 6*1707 - 1 & W_{10} = 10241 -2 = 10239 = 3*3413 \quad 6*1706+3 \\
C_{11} = 22529 & = & 6*3755 - 1 & W_{11} = 22529-2= 22527 = 3*7509 \quad 6*3754+3 \\
C_{12} = 49153 & = & 6*8192 + 1 & W_{12} = 49153-2 = 49151 = \mathbf{6*8192 -1} \\
C_{13} = 106497 & = & 3*35499 = 6*17749 +3 & W_{13} = 106497 -2 = 106495 = \mathbf{6*17749 +1} \\
\dots & \dots & \dots & \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots
\end{array}$$

Ora invece , per W_n , la sequenza dei segni è -, +, +, - (vedi la quaterna centrale in rosso), e ogni quaterna ora invece inizia con indici multipli pari di 3, e finiscono con indici multipli dispari di 3, per esempio con gli indici $6 = 2*3$, 7 , 8 , $9= 3*3$); quindi al contrario che per i numeri di Cullen; la prossima quaterna di numeri di forma $6k+1$ comincia infatti con indice $12 = 3*4$ e finisce con $15 = 3*5$, multiplo dispari di 3. Ogni quaterna, come si vede, è separata dalla successiva da due numeri multipli di 3, e con indici ora di forma $6k -2$ e $6k -1$, a differenza che nei numeri di Cullen ($6k+1$ e $6k+2$). Quindi, una perfetta simmetria di segni e di forme aritmetiche nei numeri di Cullen e di Woodall.

Il che permette di fare delle previsioni, di tipo: quale sarà il 100 numero di Cullen, e quale sarà il suo posto nella quartina o nella coppia di multipli di 3? Poiché è facile calcolarlo con $C_{100} = 100*2^{200} + 1$, e tralascieremo questo calcolo; per il posto nella quartina possiamo dire che essendo 100 di forma $6*17 -2 = 102 - 2 = 100$, e i numeri di forma $6k-2$ sono col segno -, e quindi di forma $6k -1$, vedi per es:

$$C_4 = C_6 - 2 = 65 = 6*10-1 , \text{ secondo numero della prima quartina,}$$

$C_{10} = C_{12} - 2 = 10241 = 6*1707$ secondo numero nella seconda quartina (vedi elenchi a pag.8), e così via.

Conclusione

Come possiamo vedere, i numeri di Cullen e di Woodall (primi e non primi) sono connessi alle forme aritmetiche generali $6k \pm 1$ dei numeri primi, e alle forme $6k \pm 2$

per quanto riguarda gli indici C_n e W_n e il loro posto nelle quartine dei numeri di forma $6k+1$ o $6k-1$, e possibili primi di Cullen o di Woodall, o nelle coppie di multipli dispari o pari di 3 e quindi non primi.

Caltanissetta 1.8.2010