

I NUMERI FORMOSI (O TRIANGOLARI QUADRATI)

Gruppo Eratostene

Introduzione

I numeri formosi sono numeri che sono insieme numeri triangolari e numeri quadrati, e cioè numeri triangolari quadrati.

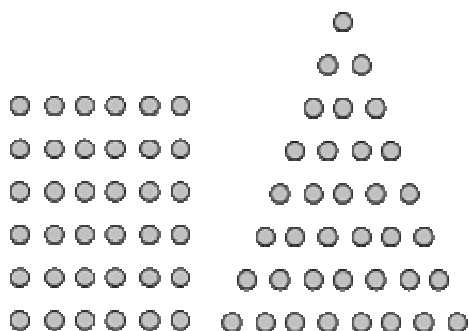
Oltre alle formule note, ne abbiamo trovato anche per calcolare Facilmente il numero triangolare quadrato successivo a ciascuno di essi, in modo simile, per molti versi, per un numero successivo di Fibonacci.

Riportiamo, dalla voce di Wikipedia, la definizione di numero quadrato triangolare (detto anche “formoso” da qualche matematico, vedi Rif.1, con alcuni esempi di calcolo).

Un **numero quadrato triangolare** è un numero che è sia [triangolare](#) sia [quadrato](#). Esistono infiniti numeri triangolari quadrati (Sequenza [A001110](#) dell'[OEIS](#)), dati dalla formula:

$$N_k = \frac{1}{32} \left((1 + \sqrt{2})^{2k} - (1 - \sqrt{2})^{2k} \right)^2 .$$

Il 36, ad esempio, può essere rappresentato sia come quadrato sia come triangolo:



Il problema della ricerca di numeri triangolari quadrati si riduce all'[equazione di Pell](#). Infatti, si tratta di trovare due numeri q e t tali che il q -esimo numero quadrato sia uguale al t -esimo numero triangolare:

$$t(t + 1)/2 = q^2$$

Con qualche trasformazione diventa:

$$\begin{aligned} t^2 + t &= 2q^2 \\ t^2 + 2t/2 + 1/4 - 1/4 &= 2q^2 \\ (t + 1/2)^2 &= 2q^2 + 1/4 \\ (2t + 1)^2 &= 8q^2 + 1 \end{aligned}$$

Sostituendo $m = 2t + 1$ e $n = 2q$, otteniamo la seguente [equazione diofantea](#):

$$m^2 = 2n^2 + 1$$

che è un'equazione di Pell.

Il k -esimo numero triangolare quadrato N_k è uguale al q -esimo quadrato e al t -esimo triangolare tali che:

$$\begin{aligned} q(N) &= \sqrt{N}, \\ t(N) &= \lfloor \sqrt{2N} \rfloor. \end{aligned}$$

t è dato dalla formula:

$$t(N_k) = \frac{1}{4} \left[\left((1 + \sqrt{2})^k + (1 - \sqrt{2})^k \right)^2 - \left(1 + (-1)^k \right)^2 \right]$$

Al crescere di k , il rapporto t/s tende alla [radice di due](#):

$N = 1$	$q = 1$	$t = 1$	$t/q = 1$
$N = 36$	$q = 6$	$t = 8$	$t/q = 1.3333333$
$N = 1225$	$q = 35$	$t = 49$	$t/q = 1.4$
$N = 41616$	$q = 204$	$t = 288$	$t/q = 1.4117647$
$N = 1.413.721$	$q = 1189$	$t = 1681$	$t/q = 1.4137931$
$N = 48.024.900$	$q = 6930$	$t = 9800$	$t/q = 1.4141414$
$N = 1.631.432.881$	$q = 40391$	$t = 57121$	$t/q = 1.4142011$ „

Ora veniamo alle nostre scoperte, ancora da dimostrare, e basate sui rapporti successivi dei valori di q, prossimi a 5, 8... (per es. $1189/204= 5,8284313$, $40391/6930 = 5,8284271$, ecc, tranne che per i primi due, $6/1 = 6$), ovviamente, $q^2 =$ numero quadrato triangolare.

1) possiamo calcolare i vari valori di q a partire dal primo, 1, con la regola

$1 * 6 = 6$	$6^2 =$	36
$6*6 -1 = 35$	$35^2 =$	1225
$35*6 - 6 = 204$	$204^2 =$	$41\ 616$
$204*6 -35 = 1\ 189$	$1189^2 =$	$1\ 413\ 721$
$1\ 189*6 - 204 = 6\ 930$	$6930^2 =$	$94\ 8024\ 900$
$6\ 930*6 -1189 = 40\ 391$	$40391^2 =$	$1\ 631\ 432\ 881$
$40\ 391*6 - 6\ 930 = 235\ 416$	$235416^2 =$	$55\ 420\ 693\ 056$
$235\ 416*6 - 40391 = 1\ 372\ 105$	$1372105^2 =$	$1.882\ 672\ 131\ 025$
$1\ 372\ 105*6 - 235\ 416 = 7\ 997\ 214$	$7\ 997\ 214^2 =$	$63\ 955\ 431\ 761\ 796$
...

Regola: moltiplicare q per 6 e sottrarre q precedente, per ottenere facilmente q successivo; elevare al quadrato, e si ottiene il numero N triangolare quadrato; evidente il coinvolgimento del numero 6, prossimo al rapporto 5,8.... tra due valori successivi di q.

2) Poiché il rapporto tra un numero quadrato triangolare e il precedente è di circa 33,97, per es. $1225/36 = 34,02...$, $41616/1225=37,9722...$,

$1413721/41616=33,9706$,ecc., c'è una connessione tra N e 36, come c'è tra q e 6 (vedi punto 1), troviamo anche che:

$$35 = \sqrt{1 \cdot 1225} = 35 = 36 - 1$$

$$1225 = \sqrt{36 \cdot 41616} = 1224 + 1$$

$$41616 = \sqrt{1225 \cdot 1413721} = 41615 = 41616 - 1$$

... ..

Lo stesso succede per i valori q e t , ma ora sempre con $+1$

$$q_i = \sqrt{(q_{i-1})(q_{i+1} + 1)}, \quad e \quad t_i = \sqrt{(t_{i-1})(t_{i+1}) + 1}, \quad \text{esempi:}$$

$$q = 35 = \sqrt{(6 \cdot 204 + 1)} = \sqrt{(1224 + 1)} = \sqrt{1225} = 35$$

$$q = 204 = \sqrt{35 \cdot 1189 + 1} = \sqrt{41615 + 1} = 204$$

$$t_i = \sqrt{(t_{i-1})(t_{i+1}) + 1}$$

$$t = 8 = \sqrt{(1 \cdot 49) + 1} = \sqrt{49 + 1} = 7 + 1 = 8$$

$$t = 49 = \sqrt{(8 \cdot 288) + 1} = \sqrt{2304 + 1} = 48 + 1 = 49$$

$$t = 288 = \sqrt{(49 \cdot 1681) + 1} = \sqrt{82369 + 1} = 287 + 1 = 288$$

... ..

Conclusione

Circa i numeri formosi, abbiamo scoperto altri semplici formule per calcolarli rapidamente a partire dal precedente, sfruttando la loro somiglianza con i numeri di Fibonacci come simile progressione quasi geometrica, ecc.

Aggiungiamo che i numeri semplicemente triangolari, simbolo T , sono coinvolti, con la relazione $2T+1$, nella formazione dei numeri di Lie $L(n) = n^2 + n + 1$, dove $n^2 + n$ è anche la somma dei primi n numeri pari consecutivi; e i numeri di Lie danno luogo sia ai gruppi di simmetria di Lie, importanti in fisica, e ai numeri di Fibonacci, di forma $n^2 + n \pm c$, con c molto piccolo, ed entrambi i numeri sono importanti in

natura (vedi “PGTS prima e seconda parte” in sezione “Articoli di Fisica Matematica”
sul nostro sito www.gruppoeratostene.com

Riferimenti

1) “I numeri formosi” sul sito della prof. Oriana Pagliarone

www.orianapagliarone.it

2) “I quadrati di Fibonacci – e il relativo paradosso)”, sul nostro sito in sezione
“Articoli su Fibonacci”

Caltanissetta 1.7.2010