

# **Generalizzazione della serie di Fibonacci ed il paradosso dei relativi quadrati - Seconda parte (sui triangoli di Fibonacci e connessione con i quadrati)**

## ***Gruppo ERATOSTENE***

Nella prima parte della nostra generalizzazione della serie di Fibonacci, abbiamo parlato dei quadrati  $Q \pm 1$  della connessione tra generalizzazione e i suoi nuovi quadrati  $Q \pm n^2$ , in questa seconda parte accenneremo invece ai triangoli ottenuti sia con la serie normale di Fibonacci, sia ai nuovi triangoli ottenuti con la generalizzazione, e quindi alla connessione tra questi e i quadrati, nel senso che per tali nuovi quadrati,  $n^2$ , ora risulta multiplo dell'ipotenusa dei nuovi triangoli generalizzati. Ma andiamo con ordine.

Sia nella nuova voce di Wikipedia “Successione di Fibonacci, sia nel Block Notes Matematico del nostro collaboratore Ing. Rosario Turco (vedi Link sul nostro sito), si accenna ai triangoli di Fibonacci (dal suddetto Block, Fibonacci e dintorni” di domenica 3 gennaio 2010):

### **“Fibonacci e dintorni”**

*Proseguiamo con qualche altra strabiliante cosa legata ai numeri di Fibonacci*

## ***Triangoli pitagorici***

*Charles Raine trovò che se si considerano 4 numeri di Fibonacci di seguito (e non più 3 come nel paradosso dei quadrati, N.d.A.A.)  $F_k, F_{k+1}, F_{k+3}, F_{k+4}$*

*e consideriamo un triangolo rettangolo con cateti  $a, b$  e ipotenusa  $c$ , allora è:*

$$a = F_k * F_{k+3}$$

$$b = 2 * (F_{k+1} * F_{k+2})$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

*esaminando ad esempio la sequenza di Fibonacci 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ... Se prendiamo ...3, 5, 8, 13, ...*

$$a = 3 * 13 = 39$$

$$b = 2(5 * 8) = 80$$

$$c = 89$$

e cioè un altro numero di Fibonacci più grande, uguale a  $\sqrt{(39^2 + 80^2)}$   
 $= \sqrt{(1521 + 6400)} = \sqrt{7921} = 89 = 1 * 89$  ora generalizziamo la serie di Fibonacci da  $F$  a  $2F$ , cioè dalla coppia numerica iniziale 1;1 alla coppia numerica successiva 2;2 abbiamo, ora, la quaterna numerica 6,10,16,26, i cui numeri sono il doppio dei rispettivi numeri della precedente quaterna 3, 5, 8, 13;

vediamo cosa succede:

$$a = 6 \cdot 26 = 156$$

$$b = 2(10 \cdot 16) = 2 \cdot 160 = 320$$

$$c = \sqrt{(156^2 + 320^2)} = \sqrt{(24336 + 102400)} = \sqrt{126736} = 356 = 4 \cdot 89 \text{ con } 4 = 2^2$$

per i tripli di Fibonacci (3;3), avremo, sempre per la stessa quaterna: 9, 15, 24, 39

$$a = 9 \cdot 39 = 351$$

$$b = 2(15 \cdot 24) = 2 \cdot 360 = 720$$

$$c = \sqrt{(351^2 + 720^2)} = \sqrt{(123201 + 518400)} = \sqrt{641601} = 801 = 9 \cdot 89, \text{ con } 9 = 3^2$$

per i quadrupli, 4F, e quindi 4;4, avremo invece  $c = 16 \cdot 89 = 1424$ , con  $16 = 4^2$  insomma lo stesso fenomeno che si verifica per i quadrati nella serie generalizzata, e con ora **terne** di Fibonacci, ma con differenza  $Q - N = \pm n^2$ , con Q quadrato dell'elemento centrale ed il prodotto dei due numeri esterni ( $n^2 = 1^2 = \pm 1$ ) per la serie nota di Fibonacci, basata sulla coppia iniziale 1;1, dalla quale

$$1 + 1 = 2, 1 + 2 = 3, 2 + 3 = 5, 3 + 5 = 8, \text{ ecc}$$

Concludendo, l'ipotenusa c di qualsiasi triangolo di Fibonacci è sempre un multiplo  $n^2$  della serie generalizzata alla coppia  $n;n$ ; per la serie iniziale di Fibonacci basata sulla coppia 1;1, tale multiplo è ovviamente  $1^2 = 1$ , proprio come nei quasi quadrati di Fibonacci, dove però è la differenza  $n^2$  alternata di segno tra i quadrati di Fibonacci Q del numero centrale della terna e il prodotto N dei due numeri esterni alla terna. Per ricordare con un esempio semplice: per la terna 5, 8, 13, abbiamo  $Q = 8^2 = 64$ ,  $N = 5 \cdot 13 = 65 = 64 + 1$ ; Per la stessa terna ma "triplicata, e quindi 3F, e quindi ora 15, 24 e 39, abbiamo  $Q = 24^2 = 576$ ,  $N = 15 \cdot 39 = 585$ ,  $N - Q = 585 - 576 = 9 = 3^2$ , con 3 della coppia numerica generalizzata 3;3.

Inoltre, i rapporti  $b/a$ ,  $c/a$  e  $c/b$  sono simili per ogni quaterna considerata; la somma  $S$  e il prodotto  $P$  di tali rapporti è molto prossima a 5, e il rapporto tra somma e prodotto è circa 1,12, o 1,06 equivalenti ad una quarta o ad un'ottava radice di 1,618.

Per il primo esempio, con  $a = 39$ ,  $b = 80$  e  $c = 89$ , abbiamo:

$$80/39 = 2,051$$

$$89/39 = 2,282$$

$$89/80 = \underline{1,112}$$

$$5,445 = \text{Somma } S$$

$$2,051 * 2,282 * 1,112 = 5,204 = \text{Prodotto } P \quad S / P = 5,445 / 5,204 = 1,046$$

circa 1,06 = ottava radice di 1,618

altro esempio per la quaterna 5, 8, 13, 21

$$a = 105 \quad b = 208, \quad c = 233$$

$$b/a = 1,980$$

$$c/a = 2,219$$

$$c/b = \underline{1,120}$$

$$5,319 = \text{Somma } S$$

$$1,980 * 2,219 * 1,120 = 4,920 = \text{Prodotto } P; \quad S / P = 5,319 / 4,920 = 1,081$$

circa 1,06, radice ottava di 1,618

Questa relazione potrebbe avere a che fare con la formula di Binet, dove appare il numero **5** :

$$1,618033\dots = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad ; \quad 0,618033\dots = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Con la serie generalizzata  $2F = 6, 10, 16, 26$  tale rapporto finale diventa invece  $5,89/5,19 = 1,134$  circa  $1,127 =$  radice quarta di  $1,618$ ; insomma un fenomeno costante quali che siano i lati del triangolo di Fibonacci ottenuto con qualsiasi generalizzazione della serie di Fibonacci.

Si pregano i lettori di segnalarci eventuali errori, modifiche, e soprattutto possibili dimostrazioni di quanto sopra, purchè brevi, fondate e possibilmente anche “eleganti” in senso matematico (e cioè, in altre parole, belle). Quanto sopra, infatti, è un insieme di sole constatazioni, mai fatte prima d’ora, che, se dimostrate, contribuiranno a migliorare sicuramente la conoscenza della teoria dei numeri, in questo caso i numeri di Fibonacci, molto importanti anche in natura, con innumerevoli esempi già noti (fiori, conchiglie, spirali, frattali, ecc.). Potrebbero venir fuori esempi anche con i numeri di Fibonacci così “generalizzati”, e cioè multipli  $nF$  di quelli già noti.

**Caltanissetta, 25.1.2010**